

حل کردن هر مسئله، ۴ مرحله دارد:

مرحله اول: فهمیدن مسئله

برای درک مسئله باید آن را خوب بخوانید و خوب درک کنید، تا متوجه شوید که سؤال واقعاً چه چیزی را از شما می‌خواهد. برای درک بهتر مسئله کارهای زیر می‌تواند به شما کمک کند:

- (۱) مسئله را به زبان و کلمات خود بیان کنید.
- (۲) خواسته‌های مسئله را معلوم کنید.
- (۳) مسئله را خلاصه کنید.
- (۴) شرط‌های خاص مسئله را جدا کنید.
- (۵) داده‌ها و اطلاعات مسئله را مشخص کنید.
- (۶) مسئله را به صورت یک نمایش ساده اجرا کنید.

مرحله دوم: انتخاب راهبرد مناسب

در دوره ابتدایی با تعدادی از راهبردهای حل مسئله آشنا شدید. دانستن نام و کاربرد هر راهبرد به شما کمک می‌کند تا آن‌ها را مرور و پیدا کنید که کدام یک برای حل مسئله، می‌تواند مفید باشد. ۸ راهبرد برای حل مسئله وجود داشت که عبارتند از:

- (۱) رسم شکل
- (۲) الگوسازی
- (۳) حذف حالت‌های نامطلوب
- (۴) الگویابی
- (۵) حدس و آزمایش
- (۶) زیرمسئله
- (۷) حل مسئله ساده‌تر
- (۸) روش‌های نمادین

تذکره دقت داشته باشید که راهبرد مناسب برای حل یک سؤال، منحصر بفرد نیست و بسیاری از سؤالات را می‌توان با بیش از یک راهبرد حل کرد.

مرحله سوم: حل کردن مسئله

با راهبردی که انتخاب کرده‌اید، مسئله را حل کنید. اگر تشخیص دادید که مسئله با آن راهبرد به نتیجه نمی‌رسد، به مرحله دوم برگردید و راهبرد خود را تغییر دهید. گاهی اوقات لازم است به مرحله اول برگردید. شاید نکته‌ای در مسئله وجود دارد که شما هنوز به آن توجه نکرده‌اید.

مرحله چهارم: بازگشت به عقب

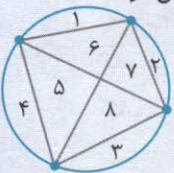
حل کردن مسئله با پیدا شدن پاسخ ریاضی تمام نمی‌شود. ابتدا پاسخ ریاضی خود را در موضوع مسئله تفسیر کنید. آیا پاسخ شما همان خواسته مسئله است؟ آیا جواب شما منطقی است؟ می‌توانید مراحل و عملیات مسئله را بررسی کنید یا مسئله را با راه‌حل دیگری پاسخ دهید.

راهبرد رسم شکل

کشیدن یک شکل مناسب می‌تواند به حل مسئله کمک کند یا به طور کامل آن را حل کند، به طوری که نیازی به نوشتن عملیات و محاسبه نباشد. گاهی ممکن است شکل را فقط تصور کنید و آن را رسم نکنید. منظور از رسم شکل، نقاشی نیست، بلکه می‌توانید برای این کار شکل‌های ساده بکشید.

نکته راهبرد رسم شکل باعث تقویت تفکر بصری است.

۱۱ چهار نقطه روی دایره‌ای قرار دارند. این نقاط را دو به دو به هم وصل می‌کنیم. چند ناحیه درون دایره ایجاد می‌شود؟



✓ پاسخ: دایره‌ای دلخواه و چهار نقطه دلخواه روی آن در نظر می‌گیریم و آن‌ها را دو به دو به هم وصل می‌کنیم و هر ناحیه را با یک شماره مشخص می‌کنیم: با توجه به شکل، ۸ ناحیه درون دایره ایجاد می‌شود.

راهبرد الگوسازی (تفکر نظام‌دار)

برای حل بعضی از مسئله‌ها باید همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید. برای این که هیچ حالتی از قلم نیفتد، لازم است آن‌ها را با نظم، الگو و ترتیبی مشخص بنویسید (با ساختن جدول افقی یا عمودی یا نمودار درختی یا ... می‌توان همهٔ حالت‌ها را مشخص کرد). الگوسازی به شما کمک می‌کند تا مطمئن شوید همهٔ حالت‌ها را نوشته‌اید. بنابراین در مسئله‌هایی که لازم است همهٔ جواب‌ها و پاسخ‌های ممکن را بنویسید، می‌توانید از این راهبرد استفاده کنید. با توجه به نظم و ترتیبی که می‌سازید، به این راهبرد تفکر نظام‌دار نیز می‌گویند.

۲ سه نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف بایستند؟

✓ پاسخ: فرض کنیم علی، حسن و حسین ۳ نفر باشند. حالت‌های مختلف به صورت زیر است:

حسن، حسین، علی / حسین، حسن، علی : علی در سمت چپ باشد.
 علی، حسین، حسن / حسین، علی، حسن : حسن در سمت چپ باشد.
 علی، حسن، حسین / حسن، علی، حسین : حسین در سمت چپ باشد.

بنابراین به ۶ طریق، ۳ نفر می‌توانند در یک ردیف قرار بگیرند.

هرگاه در مسئله‌ای تعداد داده‌ها و حالت‌های نامطلوب زیاد باشند، ابتدا با راهبرد الگوسازی تمام حالت‌های ممکن را پیدا می‌کنیم. سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حالت‌های نامطلوب را حذف می‌کنیم.

فرض کنید دوست شما نام یکی از شهرهای ایران (تعداد شهرهای ایران $= 1200$) را در نظر گرفته است. شما باید با طرح چند سؤال، شهر مورد نظر را پیدا کنید. او فقط می‌تواند به سؤال‌های شما بله و خیر بگوید.

برای پیدا کردن شهر مورد نظر باید از راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب استفاده کرد. می‌توان با انتخاب سؤال‌های مناسب، گزینه‌های نامطلوب زیادی را حذف کرد.

سؤالاتی از قبیل: (۱) آیا در استان ... قرار دارد؟ (۲) آیا حرف اول شهر ... است؟

۳ به چند حالت می‌توان سه رقم متمایز از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را انتخاب کرد به طوری که مجموع آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

رقم‌های متمایز	مجموع رقم‌ها	پاسخ: جدولی با دو ستون در نظر می‌گیریم. تمام حالت‌های انتخاب ۳ رقم متمایز و در ستون دوم، مجموع رقم‌ها را می‌نویسیم. هر حالتی که مجموع رقم‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد، جواب است.
۱، ۲، ۳	۶ ✓	
۱، ۲، ۴	۷ ✗	
۱، ۲، ۵	۸ ✗	
۱، ۳، ۴	۸ ✗	
۱، ۳، ۵	۹ ✓	
۱، ۴، ۵	۱۰ ✗	
۲، ۳، ۴	۹ ✓	
۲، ۳، ۵	۱۰ ✗	
۲، ۴، ۵	۱۱ ✗	
۳، ۴، ۵	۱۲ ✓	

راهبرد الگویابی

در ریاضی با دو نوع الگوی عددی یا هندسی روبه‌رو می‌شویم. کشف الگو، رابطه و نظم موجود در بین دنباله‌های عددی یا هندسی کمک می‌کند تا بتوانید خواسته مسئله را به‌دست آورید. این راهبرد در مسئله‌هایی کاربرد دارد که بین شکل‌ها یا عددها، الگو و رابطه خاصی وجود داشته باشد.

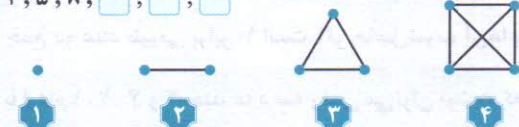
تفاوت راهبردهای الگوسازی و الگویابی

هدف از الگوسازی، نظم دادن به داده‌های مسئله است، در صورتی که در الگویابی، هدف پیدا کردن رابطه بین شکل‌ها یا عددها است.

۲، ۵، ۸، □، □، □

۴ (آ) سه عدد بعدی الگو را پیدا کنید.

(ب) شکل هفتم از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟



۲، ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷

۴ (پاسخ: آ) عددها سه تا سه تا اضافه می‌شوند، بنابراین:

۰، ۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱

تعداد پاره‌خط‌های شکل (۷)

ممکن است حل یک مسئله، روش و راه حل مستقیمی نداشته باشد یا راه رسیدن به جواب آن طولانی و دشوار باشد. شما می‌توانید با یک روش منطقی و منظم پاسخ احتمالی مسئله را حدس بزنید، سپس با توجه به شرایط گفته شده در مسئله، حدس خود را بررسی کنید و با توجه به نتیجه به دست آمده حدس بعدی را بزنید تا کم‌کم به پاسخ مسئله نزدیک شوید. برای نشان دادن حدس‌ها و آزمایش‌های خود راه حل مناسبی پیدا کنید.

۵ یک تاس را ۲۰ بار پرتاب کرده‌ایم. اگر اعداد رو شده ۲ یا ۳ و مجموع آن‌ها ۴۵ باشد، از هر عدد چند بار رو شده است؟
پاسخ: برای حدس اولیه، تعداد دفعاتی که ۲ و ۳ ظاهر می‌شوند را یکسان و برابر ۱۰ می‌گیریم. با توجه به این‌که در این حالت مجموع از ۴۵ بیش‌تر می‌شود، پس باید حالت‌هایی را در نظر بگیریم که تعداد ۳‌ها کم شود:

تعداد ۲	تعداد ۳	بررسی و آزمایش
۱۰	۱۰	$10 \times 2 + 10 \times 3 = 50 \times$
۱۱	۹	$11 \times 2 + 9 \times 3 = 49 \times$
۱۲	۸	$12 \times 2 + 8 \times 3 = 48 \times$
۱۳	۷	$13 \times 2 + 7 \times 3 = 47 \times$
۱۴	۶	$14 \times 2 + 6 \times 3 = 46 \times$
۱۵	۵	$15 \times 2 + 5 \times 3 = 45 \checkmark$

با توجه به جدول، ۱۵ بار عدد ۲ و ۵ بار عدد ۳ ظاهر شده است.

برای حل مسئله‌های چند مرحله‌ای و پیچیده از راهبرد زیر مسئله استفاده می‌کنیم. در این راهبرد ابتدا مسئله را به چند مسئله ساده تبدیل می‌کنیم. فهرستی از این زیر مسئله‌ها را درست می‌کنیم، سپس به ترتیب به آن‌ها پاسخ می‌دهیم. اگر ترتیب زیر مسئله‌ها را درست تشخیص داده باشیم، حل هر زیر مسئله به حل مسئله بعدی کمک می‌کند تا در نهایت به خواسته اصلی مسئله برسیم.

۶ پس انداز هفتگی محمد ۴۰۰۰ تومان است. او حساب کرد ۵ هفته پس انداز او، ثلث قیمت کفشی است که دوست دارد بخرد. قیمت کفش چه قدر است؟

پاسخ: ابتدا پس انداز ۵ هفته محمد را به دست می‌آوریم:

$$5 \times 4000 = 20000 \text{ (تومان)}$$

با توجه به فرض، این مقدار ثلث قیمت کفش است، بنابراین:

$$3 \times 20000 = 60000 \text{ (تومان)}$$

برای حلّ بعضی از مسئله ها، ابتدا مسئله ای ساده تر را که با مسئله اصلی در ارتباط است، حل می کنیم. سپس با استفاده از نتیجه و پاسخ مسئله ساده شده، جواب مسئله اصلی را به دست می آوریم. برای ساده کردن مسئله، می توان از عددهای تقریبی یا عددهای کوچک تر استفاده کرد. برای نتیجه گیری و پیدا کردن پاسخ مسئله، از راهبرد الگویابی استفاده می کنیم و الگوی کشف شده در مسئله ساده را به مسئله اصلی مرتبط می کنیم.

۷ قطر سیاره مشتری، ۱۳۹۸۲۲ کیلومتر و قطر سیاره تیر، ۴۸۷۹ کیلومتر است. قطر سیاره مشتری تقریباً چند برابر قطر سیاره تیر است؟

پاسخ: با توجه به کلمه تقریباً در صورت مسئله می توان تقریبی از قطرهای دو سیاره را با روش گرد کردن به دست آورد و سپس این دو عدد را با هم مقایسه کرد:

$$139822 = 140000, 4879 = 5000 \Rightarrow \frac{\text{قطر سیاره مشتری}}{\text{قطر سیاره تیر}} = \frac{140000}{5000} = \frac{140}{5} = 28$$

۸ حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا حاصل عبارت هایی با مجموع کمتر (حل مسئله ساده تر) را به دست می آوریم و با پیدا کردن یک الگو، حاصل عبارت

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

در حاصل عبارت ها، مخرج کسر، بزرگ ترین عدد در بین مخرج های داده شده است و صورت کسر یک واحد کمتر از مخرج کسر است.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

بنابراین:

بسیاری از مسئله ها را می توانیم به کمک نمادهای جبری به یک معادله تبدیل کنیم. در بعضی از مسئله ها هم می توانیم از مدل سازی هندسی استفاده کنیم. تبدیل مسئله به یک شکل هندسی و حلّ هندسی آن نیز نوعی روش نمادین یا مدل سازی به شمار می رود.

۹ علی کتاب داستانی را در ۸ ساعت مطالعه کرد و ۷ صفحه از آن باقی ماند. اگر این کتاب ۱۰۳ صفحه داشته باشد، علی به طور

متوسط در هر ساعت چند صفحه از آن را مطالعه کرده است؟

پاسخ: فرض کنیم تعداد صفحاتی که علی به طور متوسط در هر ساعت می خواند $\square$ باشد، طبق سؤال داریم:

$$8 \times \square + 7 = 103$$

تعداد صفحات مطالعه

شده توسط علی

با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش، عددی که درون مربع قرار می گیرد برابر ۱۲ است.