

اولین دوره آزمون آزمایشی المپیاد خوشخوان دفترچه سوالات ریاضی

صبح - ساعت : ۹:۰۰

کد دفترچه ۱

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله های کوتاه	چندگزینه ای
۱۸۰	۱۰	۱۵

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد دفترچه سوالات شما ۱ است. این کد را در محل مربوط روی پاسخنامه علامت بزنید. در غیر این صورت پاسخنامه شما تصحیح نخواهد شد.
۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه برگه های دفترچه سوالات را بررسی نمایید. در صورت وجود هرگونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسوول جلسه را مطلع کنید.
۳. یک برگ پاسخنامه در اختیار شما قرار گرفته است. مشخصات خود را در کادرهای مورد نظر، کامل کنید. در صورت ایجاد هرگونه مغایرتی با ثبت نام اولیه پاسخنامه شما تصحیح نخواهد شد.
۴. برگه پاسخنامه را دستگاه تصحیح می کند، پس آن را تا نکند و تمیز نگه دارید و بعلاوه پاسخ هر پرسش را با مداد مشکی نرم در محل مربوط علامت بزنید. لطفاً خانه مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.
۵. سوال های این آزمون به دو شکل پنج گزینه ای و پاسخ کوتاه است که از هم تفکیک شده اند. پاسخ درست به هر دو نوع سوال ۴ نمره مثبت دارد. پاسخ غلط به هر سوال پنج گزینه ای یک نمره منفی دارد ولی پاسخ غلط به سوال های پاسخ کوتاه نمره منفی ندارد.
۶. همراه داشتن هرگونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

بهمن ۱۳۹۳

سؤالات تستی

۱. عدد صحیح را دور یک دایره قرار داده‌ایم به طوری که هر عدد برابر قدرمطلق تفاضل دو عدد کنار خود می‌باشد اگر مجموع اعداد دور دایره برابر 202 باشد، n چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۱۰۱ (۵) هیچ‌کدام

۲. یک عدد را خوشخوان می‌نامیم اگر جمع هر دو مقسوم‌علیه متمایز آن مربع کامل باشد. چند عدد خوشخوان وجود دارد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ (۵) بی‌نهایت

۳. دو دایره C_1 و C_2 در A و B متقاطع‌اند، CD مماس مشترک آن‌هاست. اگر $\hat{C}BD - \hat{C}AD = 93^\circ$ باشد. آنگاه دو برابر $\hat{C}AD$ برابر است با:

- (۱) 83° (۲) 87° (۳) 78° (۴) 93° (۵) 90°

۴. اگر x و y اعداد حقیقی باشند به طوری که

$$\begin{cases} 10x^3 - 11x^2y + 2y^3 = 4 \\ x^3 - 2y^2x + y^3 = 1 \end{cases}$$

حاصل $x + y$ چقدر است؟

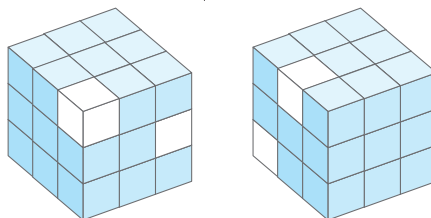
- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳ (۵) $\sqrt{2}$

۵. a, b, c اعدادی حقیقی و مثبت هستند و $a(b+c) = 152$, $b(c+a) = 162$ و $c(a+b) = 170$. مقدار abc چیست؟

- (۱) ۶۷۲ (۲) ۶۸۸ (۳) ۷۰۴ (۴) ۷۲۰ (۵) ۷۵۰

۶. ۲۵ مکعب واحد داریم که همه‌ی وجوه‌شان سیاه و ۲ مکعب واحد داریم که همه‌ی وجوه‌شان سفید هستند. با این مکعب‌ها چند مکعب متمایز به ضلع ۳ می‌توان ساخت؟

دو مکعب به ضلع ۳ را یکسان گوئیم هرگاه با یک چرخش به هم تبدیل شوند مثلاً دو مکعب زیر یکسان هستند.



- (۱) ۲۲ (۲) ۲۳ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵ (۵) ۲۶

۷. دو دایره به شعاع R یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر فاصله بین مراکز دو دایره $\sqrt{2}R$ باشد، مساحت مربعی که در ناحیه بین دو دایره محاط شده است کدام است؟

- (۱) $R^2(2 - \sqrt{3})$ (۲) $R^2(3 - 2\sqrt{2})$ (۳) $R^2(2\sqrt{2})$ (۴) $R^2(\frac{\sqrt{3}}{4})$ (۵) $R^2(2\sqrt{2} - 1)$

۸. O محل برخورد قطرهای مربع $ABCD$ می‌باشد. P نقطه‌ای روی ضلع DC می‌باشد به طوری که $\hat{DOP} = 53^\circ$ و X نقطه‌ای روی BP می‌باشد به طوری که $\hat{AXP} = 90^\circ$ ، مقدار زاویه $\hat{BXC}$ چند درجه است؟

- (۱) 113 (۲) 137 (۳) 127 (۴) 143 (۵) 107

۹. عددی 403 مقسوم‌علیه مثبت دارد. کدام جمله درست است؟

- (۱) این عدد دقیقاً یک عامل اول دارد. (۲) این عدد حتماً مربع کامل است. (۳) این عدد حتماً مکعب کامل است.
(۴) 1 و 2 (۵) 2 و 3

۱۰. در چهارضلعی محدب $ABCD$ می‌دانیم $AB = BC = CD$ و $\hat{A} = 85^\circ$ و $\hat{C} = 170^\circ$. اندازه زاویه $\hat{B}$ چند درجه است؟

- (۱) 50 (۲) 60 (۳) 70 (۴) 80 (۵) 90

۱۱. ۲۷ مکعب واحد داریم که در هر مکعب روی دو وجه مقابل عدد ۱، روی دو وجه مقابل دیگر عدد ۲ و روی دو وجه مقابل دیگر عدد ۳ را نوشته‌ایم. با کنار هم قرار دادن این مکعب‌ها یک مکعب به ضلع ۳ را ساخته‌ایم. حداقل مجموع اعداد نوشته شده روی وجوه بیرونی این مکعب چقدر است؟

- (۱) 90 (۲) 96 (۳) 84 (۴) 54 (۵) 60

۱۲. نمودار دو تابع $y = Ax^2$ و $y = 4x^2 + 3 = x^2 + 3$ را در نظر بگیرید که A مقداری حقیقی و مثبت است. این دو نمودار در چند نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؟

(۱) دقیقاً ۴

(۲) دقیقاً ۲

(۳) حداقل ۱، ولی برای مقادیر مختلف مثبت A تفاوت می‌کند.

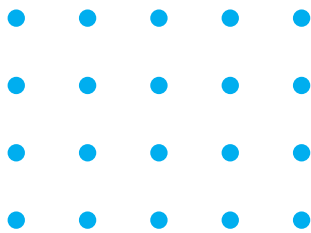
(۴) برای حداقل یک مقدار مثبت A .

(۵) هیچ‌کدام

۱۳. در دوزنقه $ABCD$ می‌دانیم $\hat{D} = \hat{A} = 90^\circ$ ، $\hat{A} + \hat{C} = BC$ و $AD = 7$. مقدار عبارت $AB \cdot CD$ چقدر است؟

- (۱) 10 (۲) $11,25$ (۳) 12 (۴) $12,25$ (۵) معلوم نیست

۱۴. حداکثر چند تا از نقاط شکل زیر را می‌توان انتخاب کرد که هیچ ۴ تایی تشکیل مستطیل ندهند؟



۷ (۱)

۸ (۲)

۹ (۳)

۱۰ (۴)

۱۱ (۵)

$$A = \{-1393, -1392, -1391, \dots, 1391, 1392, 1393\}$$

۱۵. فرض کنیم

$$B = \{-2015, -2014, -2013, \dots, 2013, 2014, 2015\}$$

و

تعداد توابع $f: A \rightarrow B$ به طوری که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم $f(x) + f(y) - f(x)f(y) \geq 1$ را n می‌نامیم. رقم یکان n چقدر است؟

۵ (۵)

۱ (۴)

۷ (۳)

۴ (۲)

۵ (۱)

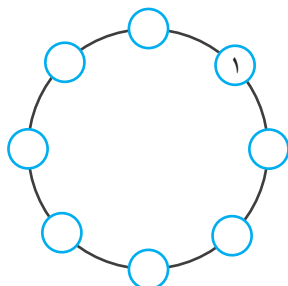
سوالات پاسخ کوتاه

پیش از شروع به حل مسئله‌های پاسخ کوتاه توضیحات زیر را به دقت بخوانید.
جواب سؤال‌های پاسخ کوتاه، عددی نامنفی و کمتر از ۱۰۰۰۰۰ است. شما باید ارقام قسمت صحیح آن را جداگانه در پاسخ‌نامه سیاه کنید. توجه نمایید که رقم یکان عدد در ستون یکان، و رقم دهگان در ستون دهگان و ... علامت زده شود. پاسخ نادرست در این بخش نمره منفی ندارد.
مثال. اگر پاسخ سؤالی ۶۹۵۰/۷۳ بود، شما باید در مقابل شماره‌ی سؤال در پاسخ‌نامه، اعداد زیر را سیاه نمایید:

یکان	دهگان	صدگان	هزارگان	ده‌هزارگان
۰	۰	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹	۹

۱. معادله‌ی زیر در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

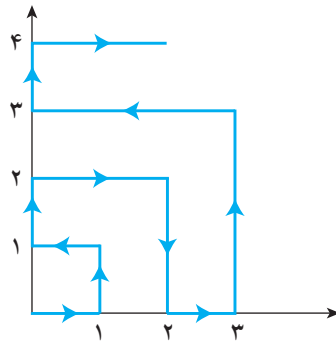
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{xy^2} = \frac{1}{100}$$



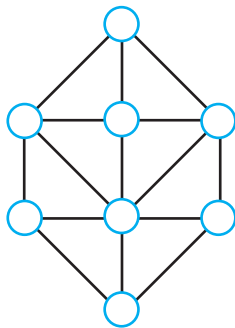
۲. اعداد ۸، ۳، ۲ را به چند طریق می‌توان در دایره‌های خالی

شکل مقابل قرار داد به طوری که از هر عدد یک بار استفاده شود و هر عدد از دو عدد مجاورش بزرگ‌تر و یا از هر دو کوچک‌تر باشد.

۳. اسمشو نبر، نارنجی را زندانی کرده است. کیل می‌خواهد نارنجی را آزاد کند. اسمشو نبر به کیل گفته است اگر بزرگ‌ترین عدد n رقمی در مبنای ۲ را انتخاب کند و سپس آن را به مبنای ۵ ببرد، دو رقم سمت راست عدد به دست آمده، تعداد سال‌های زندانی شدن نارنجی است. به ازای چند مقدار n از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 1391, 1392, 1393\}$ نارنجی کمتر از ۲ سال در زندان می‌ماند.
۴. دو رأس یک مربع بر کمان AB و رأس دیگر آن بر وتر AB از یک دایره قرار دارند. می‌دانیم طول وتر AB پنج برابر طول ضلع مربع است. اندازه کمان AB بر حسب درجه چقدر است؟
۵. تابع حقیقی f با شرایط $f(x) = f(398 - x) = f(2158 - x) = f(3214 - x)$ داده شده است. حداکثر تعداد مقادیر متمایز موجود در اعداد $f(0), f(1), \dots, f(999)$ چند تاست؟
۶. کرمی مطابق شکل زیر حرکت می‌کند و در هر ثانیه یک واحد را طی می‌کند. فرض کنید در ثانیه‌ی صفرم، در نقطه‌ی مبدأ و در ثانیه ۱۳۹۳ ام در خانه (m, n) باشد، مقدار mn چیست؟

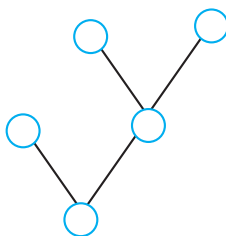


۷. چند سه‌تایی مرتب از اعداد اول وجود دارد که $3pq + p + qr = pqr$.



۸. اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ را به چند طریق می‌توان در دایره‌ها قرار داد که اعداد هر دو دایره‌ای که با پاره‌خط به هم وصلند متوالی نباشند و هر عدد هم دقیقاً یک بار به کار برود؟

۹. در شش‌ضلعی $ABCDEF$ ، همه زوایه‌ها برابرند و $EF = CD = AB = 1$ و $BC = DE = FA = a$. می‌دانیم مساحت مثلث ACE ، 70% مساحت شش‌ضلعی است. مجموع همه مقادیر ممکن برای a چقدر است؟



۱۰. به چند طریق می‌توان اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را در دایره‌ها قرار داد (هر عدد یک بار) به‌طوری که برای هر دایره‌ای که دو دایره بالایش هستند مجموع اعداد دو دایره بالایی بر عدد آن دایره بخش‌پذیر باشد؟

