



مجموعه کتاب‌های علامه حلی

ریاضی

پایه هفتم (اول متوسطه ۱)، ویژه استعداد های درخشان



زهره دانایی

با همکاری مرتضی سلیمی



عددهای صحیح

عددهای علامت دار (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم عددهای صحیح)

شما در کتاب درسی، با چهار عمل اصلی در اعداد صحیح آشنا شده‌اید. به نکات زیر توجه کنید:

نکته: در مقایسات اعداد صحیح اگر چهار عمل اصلی و پرانتز بین اعداد باشد، به ترتیب ابتدا پرانتز، سپس عمل ضرب و تقسیم و بعد از آن جمع و تفریق انجام می‌شود.

نکته: اگر اولویت مقایسات بین دو عمل مثل ضرب و تقسیم در مقایسات اعداد صحیح یکسان باشد، عملیاتی زودتر انجام می‌شود که در سمت چپ باشد.



فعالیت

با توجه به نکات بالا، با اضافه کردن علامت جمع یا تفریق، تساوی‌های زیر را برقرار کنید.

الف) $5 \square - 6 \square - 7 \square - 8 \square - 9 = +7$

ب) $5 \square - 6 \square 7 \square + 6 \square + 5 = -17$

پرانتز را جایی قرار دهید که حاصل هر عبارت حداکثر شود:

پ) $-5 \times 6 + 7 - 8 \times 9 =$

ت) $-1 + 2 - 3 - 4 - 5 + 6 =$

چهار عمل اصلی را طوری قرار دهید که حاصل این عبارت‌ها، حداقل شود.

ج) $-3 \square 2 \square 5 \square - 7 =$

چ) $-9 \square - 10 \square - 11 \square - 12 =$

$-1 - 2 - 3 - 4 - 5$

مثال: چگونه با اضافه کردن پرانتز حاصل عبارت روبه‌رو حداقل می‌شود؟

$(-1)(-2)(-3)(-4)(-5) = -120$

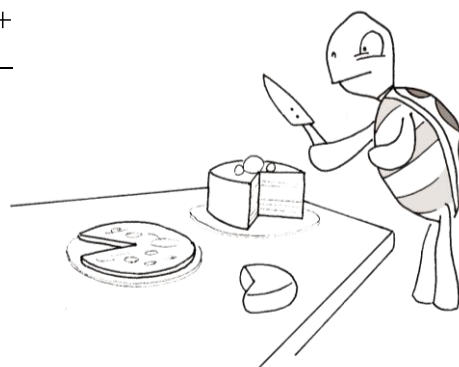
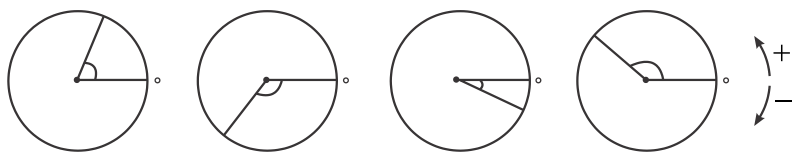
حل:

وقتی بین دو پرانتز عملی نوشته نشده یعنی آن دو پرانتز در هم ضرب می‌شوند.



کار در کلاس

۱- با توجه به قرارداد مشخص‌شده، برای هر زاویه یک عدد علامت‌دار بنویسید.



۲- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید.

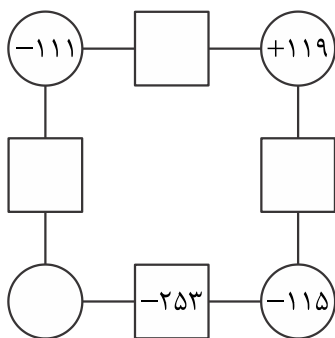
$$\square - (-18) = 13$$

$$\square \times (-5) = +7$$

$$15 - (-(-\square)) = 45$$

$$78 \div \square = 13$$

۳- در شکل زیر، حاصل جمع عددهای روی دو رأس مربع، روی ضلع بین آن دو رأس نوشته شده است. جاهای خالی را کامل کنید.



۴- حاصل عبارت $45 - 6(-2 - 5) - (-3) - 3 + 4 - 2$ را محاسبه کنید.

۵- حاصل عبارت زیر چند است؟

$$10[-12 + (-11) + (-10) + \dots + 12] - [-10 + (-9) + \dots + 12] =$$



تمرین:



۱- میانگین دمای دو شهر -8 و اختلاف دمای دو شهر -4 می‌باشد. دمای شهری که سردتر است، چند درجه است؟

.....

.....

۲- حاصل عبارت‌های زیر را پیدا کنید. سعی کنید در زمان کوتاهی و به صورت ذهنی پاسخ دهید.

الف) $-9 \times (-8 + 3) - 6 - (-5) =$

ب) $-13 - (-(-13) + 13) + 13 \times 3 \div (+1 - (-2)) =$

پ) $15 \div 5 \times (5 - (-5)) \times 15 - (-30) =$

ت) $10 - 10(-9 - (-19)) \times 10 \div (-10 + 5) =$

۳- دمای شهر A، $+8$ درجه است. دمای شهر B، 11 درجه سردتر است و شهر C، 5 درجه گرم‌تر از شهر B است. میانگین دمای این سه شهر را حساب کنید.

.....

.....

۴- علامت حاصل هر عبارت را تعیین کنید.

الف) $(-119 + 66) \times (321 - 312) \rightarrow$

ب) $(-985 + (-812)) - (-537) \rightarrow$

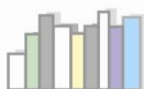
پ) $(-143) \times (-18) \times (-1999) \rightarrow$

۵- بین عددهای -500 و 500 چند عدد صحیح وجود دارد که فقط رقم‌های ۴ و ۳ را داشته باشند؟

.....

.....

.....



۶- قرینه عدد ۷- روی محور اعداد، نسبت به عدد ۳+ و قرینه عدد ۱۱- نسبت به عدد ۲- را حساب کنید. اختلاف آن‌ها چقدر است؟

.....

.....

۷- مجموع دو عدد صحیح ۱۷ و اختلاف آن‌ها ۲۱ است. عدد کوچک‌تر چند است؟

.....

.....

۸- میانگین فاصله یک عقاب، یک ماهی و یک کوسه از سطح دریا ۶- متر و میانگین فاصله عقاب و ماهی از سطح دریا ۴+ متر است. فاصله کوسه از سطح دریا چقدر است؟



.....

.....

.....

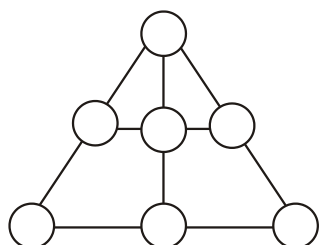
.....

.....

۹- اعداد ۱ تا ۹ را در جعبه‌های زیر قرار دهید به طوری که پاسخ کم‌ترین مقدار ممکن شود. (از هر عدد فقط یک بار استفاده کنید.)

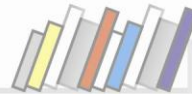
$$\square \square \square \square \times \square \square \square \times \square \square$$

۱۰- می‌خواهیم عددهای ۱، ۲، ۰، ۱، -۱، -۲، -۳، -۴ را در شکل زیر قرار دهیم، به طوری که مجموع عددهای روی هر پاره‌خط با هم برابر باشند. عدد بالای مثلث کدام است؟



۱۱- یک عدد سه رقمی از یک عدد چهار رقمی کم شده است و نتیجه یک عدد سه رقمی است.

$$\square \square \square \square - \square \square \square = \square \square \square$$



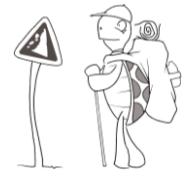
همه این ۱۰ رقم متفاوت هستند. کوچک‌ترین عددی که می‌تواند نتیجه این تفریق باشد، چیست؟

.....

۱۲- عدد $270 -$ را به چند طریق می‌توان به صورت مجموع چند عدد منفی متوالی نوشت؟

.....

.....



۱۳- یک عدد صعودی، عددی است که هر رقم آن از رقم قبلی بزرگ‌تر باشد. یک عدد نزولی عددی است که هر رقم آن کم‌تر از رقم قبلی باشد. عددی سه رقمی نزولی پیدا کنید که حاصل ضرب یک عدد صعودی در خودش باشد.

.....

.....

۱۴- بزرگ‌ترین عدد صحیح مثبت n را به گونه‌ای پیدا کنید که رقم صفر نداشته باشد، مجموع ارقامش ۱۵ باشد و همچنین مجموع ارقام دو برابر آن عدد یعنی $2n$ کم‌تر از ۲۰ باشد.

.....

.....

۱۵- تمامی اعداد شش رقمی که از ارقام ۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۰ (هر کدام دقیقاً یک بار) تشکیل شده‌اند را در نظر بگیرید. اگر آن‌ها را به ترتیب بچینیم، 502 امین عدد چند است؟

.....

.....

الگویابی در عددهای صحیح



فعالیت

زهرا و سعید دو قلو هستند. آن‌ها هر شب، چیزهایی را که در مدرسه آموخته‌اند، با هم مقایسه می‌کنند و هر کدام برای دیگری مسأله‌ای طرح می‌کند. سعید کمی ناقل است. او اغلب مسأله‌ای را که حوصله ندارد خودش به آن فکر کند، به زهرا می‌دهد و به روی خودش نمی‌آورد که قبلاً روی آن فکر نکرده و زهرا را تشویق به حل آن می‌کند. امشب سعید این مسأله را به زهرا داده است:

$$1+2+3+4+5+\dots+1000=?$$



زهرا پرسید: این که خیلی زیاد است، می‌شود با ماشین حساب حل کنم؟

سعید زیرکانه خندید و گفت: اما فقط ۵ دقیقه وقت داری!

هنوز به ۵۰ نرسیده، حوصله زهرا سر رفته بود و گفت: بیا با هم دنبال راه حل دیگری بگردیم!

وقتی قرار است اعداد زیادی را پشت سر هم جمع کنیم، با توجه به خاصیت جابه‌جایی در جمع، لازم نیست حتماً دو عدد پشت سر هم را با هم جمع کنیم. بهتر است ابتدا آن‌ها را به شکل مناسبی دسته‌بندی کنیم، سپس با یافتن الگویی بین اعداد هر دسته، حاصل جمع را پیدا کنیم:

$$1+2+3+4+5+\dots+98+99+100$$

$$1+100=101$$

$$2+99=101$$

$$3+98=101$$

سه نقطه میان سری اعداد، یعنی به همین ترتیب و با همین الگو پیش می‌روند!

پس می‌توان نوشت:

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 100 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 99 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline 98 \\ \hline \end{array} + \dots + \begin{array}{|c|} \hline 98 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 99 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 100 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 101 & 101 & 101 & & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

یعنی حاصل هر دسته، عدد می‌شود. چون از ۱ تا ۱۰۰، صد تا عدد داریم، یعنی حاصل جمع کل دسته‌ها خواهد شد. چون در سری اعداد ۱ تا ۱۰۰، در حاصل جمع بالا، هر کدام ۲ بار محاسبه شده‌اند، پس:

$$1+2+3+\dots+100=\frac{\bigcirc}{2}=\dots\dots\dots$$

بنابراین، حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ هم می‌شود:



مثال: حاصل جمع همه اعداد زوج از ۲ تا ۱۰۰ چند است؟

حل: با توجه به دسته‌بندی زیر حاصل جمع هر دسته ۱۰۲ است، چون از ۱ تا ۱۰۰، اعداد یکی در میان، زوج هستند، پس

$$\text{تعداد دسته‌ها برابر } 50 = \frac{100}{2} \text{ است.}$$

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots, 96, 98, 100$$

$$100, 98, 96, \dots, 6, 4, 2$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 100 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline 98 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline 6 \\ \hline 96 \\ \hline \end{array} + \dots + \begin{array}{|c|} \hline 100 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$102 \quad 102 \quad 102 \quad 102$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 96 + 98 + 100 = \frac{50 \times 102}{2} = 2550$$

مثال: حاصل جمع، این اعداد چند است؟

$$8 + 16 + 24 + \dots + 11136 + 11144 = ?$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$8 \times 1 \quad 8 \times 2 \quad 8 \times 3 \quad 8 \times 1392 \quad 8 \times 1393$$

حل: می‌توان عبارت بالا را به صورت زیر نوشت:

$$8 + 16 + 24 + \dots + 11144 = 8 \times (1 + 2 + 3 + \dots + 1393)$$

یعنی:

$$8 + 16 + 24 + \dots + 11144 = 8 \times \frac{1393 \times 1394}{2} = 8 \times 970921 = 7767368$$

و بنابراین:

شما سعی کنید این مسئله را با دسته‌بندی دیگری حل کنید.

نکته: یادتان باشد تعداد اعداد را خیلی وقت‌ها می‌شود به سادگی پیدا کرد، اما اگر الگوی عددی، کمی پیچیده شد می‌توانید از

این رابطه هم برای پیدا کردن تعداد اعداد، استفاده کنید:

$$\frac{\text{تعداد اعداد} + 1}{2} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{2}$$

تعداد اعداد = (عدد اول + عدد آخر) / 2

البته این رابطه تنها وقتی به کارتان می‌آید که فاصله بین دو عدد متوالی در طول الگو ثابت باشد.

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100 = ?$$

مثال: حاصل عبارت را پیدا کنید.

حل: راستش این هم مسئله سعید بود که امشب به زهرا داد:

زهرا آن را این‌گونه دسته‌بندی کرد:

$$(1 + 3 + 5 + \dots + 99) + (-2 - 4 - 6 - \dots - 100)$$

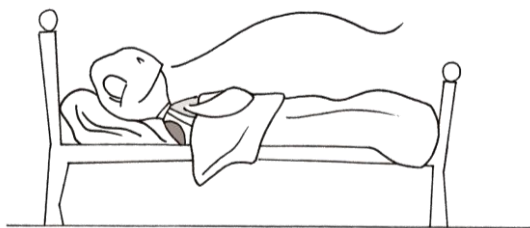
و به سعید گفت که با توجه به مثال‌های شب قبل، می‌توان حاصل جمع را پیدا کرد اما سعید که حوصله نداشت و خوابش

گرفته بود گفت: من آن را این‌طور دسته‌بندی می‌کنم:

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 99 - 100$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1$$



و حاصل جمع معلوم است: $50 \times (-1) = -50$

فالا که زهرا و سعید فوابشان برد، شما این مسئله‌ها را حل کنید:

کار در کلاس

۱- حاصل جمع همه اعداد فرد ۱ تا ۳۹ را پیدا کنید.

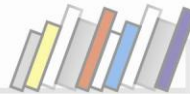
۲- حاصل عبارت $\frac{1-2-3-4-5-6-7-8}{8-7-6-5-4-3-2-1}$ را حساب کنید.

۳- مقدار عبارت $1-2+3-4+5-6+7-8+\dots-60$ را حساب کنید.

۴- اعداد ۱- تا ۹- را در جدول زیر، طوری قرار دهید که حاصل جمع هر سطر و هر ستون برابر باشد.

	-۵	

حاصل جمع قطرها چه عددی شد؟



تمرین:



۱- الگوی مربوط به هر دنباله را توضیح دهید و چهار جمله بعدی را بنویسید.

الف) $-۱, -۳, -۷, -۱۵$

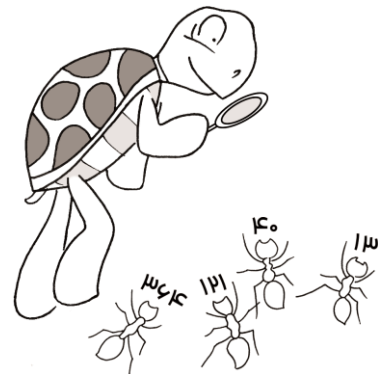
.....

.....

ب) $۳۶۴, ۱۲۱, ۴۰, ۱۳, ۴, \dots, \dots, \dots, \dots$

.....

.....



پ) $-۷, +۱۴, -۴۲, +۱۶۸, -۸۴۰, \dots, \dots, \dots, \dots$

.....

.....

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۱۲۹ + ۱۲۶ + ۱۲۳ + \dots + ۳ =$

.....

.....

ب) $(۱۰۱۵ - ۱۰۱۰) + (۱۰۰۹ - ۱۰۰۴) + (۱۰۰۳ - ۹۹۸) + \dots + (۶ - ۱) =$

.....

.....

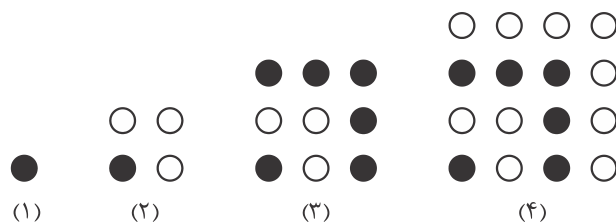
۳- حاصل عبارت $۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۷۲۰$ را به دست آورید.

.....

.....



۴- با توجه به شکل زیر، حاصل جمع اعداد فرد ۱ تا ۷۰۱ را پیدا کنید.



رابطه بین شکل و عبارت بالا را توضیح دهید.

.....

.....

.....

۵- در عبارت زیر از پنج عدد ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ هر کدام دقیقاً یک بار استفاده کنید تا حاصل عبارت برابر با ۷۹- شود.

$$(-\square) \times (\square + \square) + (-\square) \times (+\square)$$

۶- همه عددهای طبیعی ۱ تا ۴۵۰ را نوشته‌ایم، رقم ۴ چند بار نوشته شده است؟

.....

.....

۷- در جدول 3×3 زیر اعداد بالای جدول، بیانگر حاصل ضرب اعداد ستون پایینی آن‌هاست و اعداد سمت چپ جدول بیانگر حاصل ضرب اعداد هم‌ردیف آن‌هاست. مقدار عددی ؟ را پیدا کنید.

	-۱۵	۱۰	-۶
۳۰			
؟			
۲			

۸- آیا می‌توان علامت‌های + و - را برابر در مربع‌های زیر طوری قرار داد که تساوی برقرار شود؟

اگر بله دست به کار شوید و اگر خیر، دلیل بیاورید.

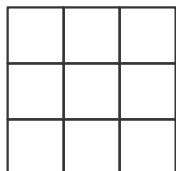
الف) $۱\square۲\square۳\square۴\square\dots\square۴۹\square۵۰=۰$

.....

ب) $۱\square۲\square۳\square۴\dots\square۴۹\square۵۰=-(۱۲۶۷)$

.....

۹- اعداد ۱۳-، ۱۰-، ۷-، ۴-، ۱-، ۲، ۵، ۸، ۱۱ را در مربع زیر طوری قرار دهید که حاصل جمع هر ستون و هر سطر با هم برابر باشد.



- ۱۰- مثلث‌های شکل مقابل را به روش زیر با اعداد طبیعی متوالی پر می‌کنیم.
- الف) در خانه‌هایی که در آن‌ها علامت سؤال است چه اعدادی باید قرار بگیرد؟
- ب) مجموع اعداد ردیف پایین چند است؟

.....

.....

.....

- ۱۱- جدول اعداد مقابل را در نظر بگیرید.

این جدول تا سطر پنجم نوشته شده است.

الف) اگر جدول را تا سطر ۱۳۹۳ ادامه دهیم، مجموع کل اعداد جدول را پیدا کنید.

		۲			
		۲	-۲		
	۲	-۲		۲	
	۲	-۲		۲	-۲
۲	-۲		۲	-۲	۲

.....

.....

.....

- ب) حاصل جمع اعداد تا کدام سطر برابر ۲۰۱۴ می‌شود؟

.....

.....

- ۱۲- در سمت راست حاصل عددی عبارت $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 1393$ چند صفر وجود دارد؟ (به‌طور مثال عدد ۱۰۲۰۰۰۰۰ پنج رقم صفر در سمت راست خود دارد).

.....

.....

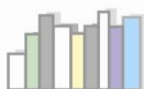
.....

- ۱۳- در خیابان ما، خانه‌ها به‌صورت ۱۶، ۱۴، ۱۲، ۱۰، ۸، ۶، ۴، ۲ شماره‌گذاری شده‌اند. خانه ما در مکانی قرار دارد که جمع شماره‌های خانه‌های سمت چپ با جمع شماره‌های سمت راست برابر است. شماره پلاک خانه ما چند است؟

.....

.....

.....



۱۴- جدول 20×20 با اعداد پر شده است. به طوری که در سطر اول اعداد ۱ تا ۲۰ و در سطر دوم اعداد ۲۱ تا ۴۰ و با همین ترتیب دیگر سطرها پر شده‌اند. اگر چهار خانه وسط جدول را در نظر بگیریم، حاصل جمع این چهار خانه، چه عددی است؟

.....

.....

.....

.....



۱۵- ارقام سه عدد ۸۷۲، ۳۲۱ و ۹۴۲ به شکل نزولی هستند، یعنی هر رقم از رقم سمت چپ خود کوچک تر است. ولی اعداد ۳۴۲، ۶۶۷ و ۵۳۳ این گونه نیستند. هر کدام از اعداد دنباله زیر، از سه رقم تشکیل شده‌اند:

۱۰۰، ۱۰۱، ۱۰۲، ...، ۹۹۸، ۹۹۹

چند تا از اعداد سه رقمی این دنباله، دارای ارقام به شکل نزولی هستند؟

.....

.....

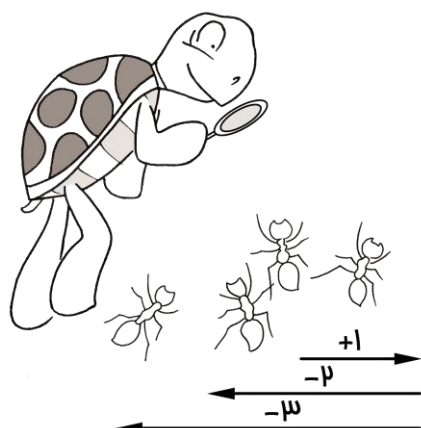
۱۶- مورچه‌ای در مبدأ روی محور اعداد صحیح خانه دارد. او از خانه شروع به حرکت می‌کند. در ثانیه اول، یک واحد به راست یا چپ می‌رود، در ثانیه دوم، دو واحد به راست یا چپ و به همین ترتیب در ثانیه سوم، سه واحد، در ثانیه چهارم، چهار واحد و

الف) آیا ممکن است مورچه بعد از ۲۰ ثانیه به خانه برگردد؟

.....

.....

.....



ب) بعد از ۲۱ ثانیه چطور؟

.....

.....

.....



مرور فصل

۱- رقم یکان حاصل جمع اعداد $1394 + \dots + 6 + 4 + 2$ چند است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۸

۲- دو تاس مکعبی داریم که روی وجه‌های هر کدام $1, 2, 3, 4, 5, 6$ را نوشته‌ایم. اگر هر دو تاس را با هم بیندازیم. حاصل جمع اعداد روی آن‌ها کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟
(سومین دوره المپیادهای ریاضی نوجوانان)

- (۱) ۳ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴) -۶



۳- 1992 معادل کدام است؟
(المپیادهای ریاضی نوجوانان انگلستان)

- (۱) $8 \times 3 + 83$ (۲) $83 \times 8 \times 3$ (۳) 83×83 (۴) $8 \times (83 + 3)$

۴- حاصل جمع $1393 + \dots + 7 + 5 + 3 + 1$ چند است؟

- (۱) 697×697 (۲) 697×1393 (۳) 2×697 (۴) 696×696

۵- حاصل ضرب $(50 - 2050) \times \dots \times (50 - 2) \times (50 - 1) \times 51$ چند است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{2051 \times 51}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{2050 \times 2101}{2}$

۶- میانگین ۵ عدد متوالی ۱۷ شده است. (این ۵ عدد نمره ۵ درس یک دانش‌آموز است!) در درس ششم چه نمره‌ای بگیرد تا معدل او ۱۵ شود؟

- (۱) ۱۷+ (۲) ۱۵+ (۳) ۱۶+ (۴) ۵+

۷- کدام گزینه معادل بقیه گزینه‌ها نیست؟
(المپیادهای ریاضی نوجوانان انگلستان ۱۹۹۱)

- (۱) $1 \div 9 + 9 \div 1$ (۲) $1 \times 9 \div (9 \times 1)$ (۳) $1 - 9 + 9 \times 1$ (۴) $1 \times (9 - 9) + 1$

۸- اختلاف دو عدد ۶- است. به هر عدد ۵+ تا اضافه می‌کنیم. اختلاف دو عدد چند می‌شود؟

- (۱) ۱+ (۲) ۶- (۳) ۱- (۴) ۴+

۹- حاصل جمع قرینه عدد ۱۱- نسبت به عدد ۲+ روی محور اعداد با قرینه عدد ۷+ نسبت به ۳- کدام است؟

- (۱) ۱۵+ (۲) ۳+ (۳) ۱۳- (۴) ۲+

۱۰- حاصل عبارت $(4 \times 50 + 5) + \dots + (4 \times 2 + 5) + (4 \times 1 + 5)$ کدام است؟

- (۱) ۵۳۵۰ (۲) ۵۲۵۰ (۳) ۵۱۵۰ (۴) ۵۱۰۰