



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



المپیادهای ریاضی چین

(۱۹۸۶-۲۰۰۰)

گردآوری و ترجمه ارشک حمیدی



در کتاب المپیادهای ریاضی چین (۱۹۸۶-۲۰۰۰)

خواننده به خوبی با نوع مسأله‌هایی که در کشور چین برای گزینش اعضای تیم شرکت کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی مناسب دانسته می‌شوند آشنا می‌شود.

موفقیت‌های خیره‌کننده کشور چین در المپیاد بین‌المللی ریاضی دلیل علاقه افراد به آگاهی از نحوه انتخاب دانش‌آموزان چینی برای شرکت در این مسابقه معتبر است.

مطالعه این کتاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به

شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی،

دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.



مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی

زیر نظر :

یحیی تابش

عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمرزاده

عضو هیأت علمی دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیته ملی المپیاد ریاضی



المپیادهای ریاضی چین

(۱۹۸۶-۲۰۰۰)

گردآوری و ترجمه ارشک حمیدی

المپیادهای ریاضی چین (۲۰۰۰-۱۹۸۶)

گردآوری و ترجمه: ارشک حمیدی

ویرایش: بردیا حسام

ناشر: مؤسسه فرهنگی فاطمی

چاپ دوم، ۱۳۸۸

شابک ۹۶۴-۳۱۸-۳۷۳-۴

ISBN 964-318-373-4

قیمت: ۲۵۰۰ تومان

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسه فرهنگی فاطمی

- مدیر تولید: فرید مصلحی

- طراح جلد: زهرا قورچیان

- حروفچینی و صفحه‌بندی (TEX-ماپرک): مریم مهری

- رسامی: فاطمه ثقفی

- نظارت بر چاپ: علیرضا رضانزاد

چاپ و صحافی: چاپخانه خاشع

کلیه حقوق برای مؤسسه فرهنگی فاطمی محفوظ است.

مؤسسه فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱ - میدان دکتر فاطمی، خیابان

جوبیار، کوچه میرهادی، شماره ۱۴ تلفن و نمابر: ۸۸۹۶۱۴۲۲ - ۸۸۹۶۴۷۷۰

info@fatemi.ir



حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲ - ، گردآورنده و مترجم.

المپیادهای ریاضی چین (۲۰۰۰-۱۹۸۶) / گردآوری و ترجمه ارشک حمیدی: زیر نظر یحیی تابش، امیدعلی کرمزاده؛ ویرایش بردیا حسام. - تهران: فاطمی، ۱۳۸۳.

ده، ۱۴۹ ص.: مصور. - (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)

ISBN 964-318-373-4

فهرست‌نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

چاپ دوم: ۱۳۸۸

کتابنامه: ص. ۱۴۹.

۱. المپیادها (ریاضیات). الف. تابش، یحیی، ۱۳۲۹ - ب. شهنی کرمزاده، امیدعلی، ۱۳۲۳ - ج. عنوان.

۲۷۲/۲۳۸

۱۷/۸۴۰/۲۴/۲۴۰۶۰ L.B.

م ۸۲-۳۷۲۹۲

کتابخانه ملی ایران

فهرست مطالب

هفت	آمادگی برای المپیاد ریاضی
نه	پیشگفتار
۱	مسأله‌ها
۳	اولین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۶
۵	دومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۷
۷	سومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸
۹	چهارمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۹
۱۱	پنجمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۰
۱۳	ششمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۱
۱۵	هفتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۲
۱۷	هشتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۳
۱۹	نهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۴
۲۱	دهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۵
۲۳	یازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶
۲۵	دوازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۷
۲۷	سیزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۸

۲۹	چهاردهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۹
۳۱	پانزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۲۰۰۰
۳۳	راه حلها
۳۵	اولین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۶
۴۳	دومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۷
۵۰	سومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸
۵۸	چهارمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۹
۶۵	پنجمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۰
۷۳	ششمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۱
۸۰	هفتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۲
۸۹	هشتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۳
۹۷	نهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۴
۱۰۴	دهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۵
۱۱۱	یازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶
۱۱۷	دوازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۷
۱۲۲	سیزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۸
۱۳۲	چهاردهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۹
۱۴۰	پانزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۲۰۰۰

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانه قرن بیست و یکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوه جامعه خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنه عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادها و ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر المپیاد ریاضی اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطه آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال مسابقه اتووش به نام بارون لوراند اتووش^۱ به صورت مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به کار گرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی المپیاد بین‌المللی ریاضی شد و از ۲ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیه ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقه بین‌المللی دانش‌آموزی است.

1. Baron Loránd Eötvös

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقه ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیده سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه که اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادها و خلاق می‌انجامد. از این رو مؤسسه انتشارات فاطمی به انتشار مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دسته اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریه اعداد، آنالیز و جبر است.

دسته دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعه مسائل و کتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دسته سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته درباره المپیاد ریاضی است.

مجموعه آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی شده برای همه چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

کتاب حاضر از دسته سوم است. در این کتاب مسأله‌های المپیادهای ریاضی چین از سال ۱۹۸۶ تا سال ۲۰۰۰ را آورده‌ایم. نود مسأله‌ای که در این کتاب آمده‌اند، خواننده را با نوع مسأله‌هایی که در کشور چین برای گزینش اعضای تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی مناسب دانسته می‌شود، آشنا می‌کنند. موفقیت‌های خیره‌کننده کشور چین در المپیاد بین‌المللی ریاضی دلیل علاقه افراد به دانستن نحوه انتخاب دانش‌آموزان چینی برای شرکت در این مسابقه معتبر است. مطالعه این کتاب برای دانش‌آموزانی که علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی هستند، دبیران، دانشجویان و سایر علاقه‌مندان مفید است.

پیشگفتار

کم نیستند کسانی که ضمن برخورد با مسأله‌های جالب و پیکارجو به ریاضیات علاقه‌مند شده‌اند. رضایت خاطری که پس از حل مسأله‌ای پیکارجو دست می‌دهد، آنقدر پابرجاست که حتی سالیانتمادی نقش آن زدوده نمی‌شود. البته باید دانست که راه حل مسأله‌ای جالب و باارزش به ندرت به سادگی و بدون زحمت به دست می‌آید، بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است.

مسابقه‌های ریاضی، که امروزه بخش مهمی از فرهنگ ریاضی به شمار می‌آیند، منابعی غنی از چنین مسأله‌هایی هستند. علاوه بر این، برگزاری چنین مسابقه‌هایی به سرزندگی محیطهای دانش‌آموزی و تقویت روحیه کارگروهی کمک فراوانی می‌کند. بسیار پیش می‌آید که دانش‌آموزان، پس از مسابقه، راه‌حلهای یکدیگر را بررسی می‌کنند و یا به‌طور گروهی راه حل مسأله‌هایی را که حل نکرده‌اند پیدا می‌کنند.

در حال حاضر، اکثر کشورهای جهان مسابقه‌های ریاضی در سطح ملی برگزار می‌کنند. علاوه بر این، هر سال المپیاد بین‌المللی ریاضی در یکی از کشورهای جهان برگزار می‌شود که معتبرترین مسابقه ریاضی دانش‌آموزی است.

موفقیتهای خیره‌کننده کشور چین در المپیاد بین‌المللی ریاضی دلیل علاقه افراد به آگاهی از نحوه انتخاب و آموزش دانش‌آموزان چینی برای شرکت در این مسابقه دشوار است. در کشور چین مسابقه‌های ریاضی متعددی در سطوح مختلف برای دانش‌آموزان برگزار می‌شود. یکی از اینها مسابقه ریاضی سراسری چین است. در ژانویه هر سال از برگزیدگان این مسابقه دعوت می‌شود که ضمن شرکت در اردوی زمستانی ریاضی، در المپیاد ریاضی چین هم شرکت کنند. برگزیدگان این المپیاد در آزمونهای

گزینش تیم شرکت می‌کنند تا اعضای تیم شرکت‌کننده در المپیاد بین‌المللی ریاضی مشخص شوند. در این کتاب مسأله‌های المپیادهای ریاضی چین از سال ۱۹۸۶ تا سال ۲۰۰۰ را آورده‌ایم. این کتاب از دو بخش تشکیل شده است، در بخش اول صورت مسأله‌ها و در بخش دوم راه‌حل مسأله‌ها را آورده‌ایم. با اینکه مسأله‌های این کتاب اغلب دشوارند، برای حل کردن اکثر آنها نیاز به استفاده از تکنیکهای پیچیده نیست و تسلط بر روشهای اصلی مسأله حل کردن و شکیبایی و پیگیری ایده‌هایی که به ذهن می‌رسد کافی است.

ارشک حمیدی، فروردین ۱۳۸۳

مسألة

اولین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۶

مسأله ۱. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید دو حکم زیر هم‌ارزند:

(الف) به‌ازای هر i و j که $i \neq j$ ، $a_i + a_j \geq 0$ ؛

(ب) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$ که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددهای حقیقی غیرمنفی دلخواهی هستند که

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

مسأله ۲. D, E و F نقطه‌هایی روی ضلع BC از مثلث ABC اند و AD, AE و AF به‌ترتیب

ارتفاع، نیمساز و میانه این مثلث‌اند. اگر $AD = 12$ ، $AE = 13$ و $AF = m$ ، تعیین کنید که به‌ازای

چه مقدارهایی از m ، زاویه BAC

(الف) حاده است؛

(ب) قائمه است؛

(ج) منفرجه است.

مسأله ۳. فرض کنید $z_1, z_2, \dots, z_n$ عددهایی مختلط باشند و

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = 1$$

ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ وجود دارد که مجموع عضوهایش، که آن را S می‌نامیم،

در نابرابری $|S| \geq \frac{1}{6}$ صدق می‌کند.

مسألة ۴. $PQRS$ چهارضلعی محدبى درون مثلث ABC است. ثابت کنید مساحت یکی از مثلثهای PQR, PQS, PRS و QRS از یک چهارم مساحت مثلث ABC بیشتر نیست.

مسألة ۵. آیا جایگشتی از عددهای

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 1986, 1986$$

وجود دارد که به ازای هر k ، دقیقاً k عدد دیگر میان دو k وجود داشته باشد؟

مسألة ۶. هر نقطه در صفحه را به دلخواه به رنگ سیاه یا سفید می‌کنیم. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۱ یا $\sqrt{3}$ وجود دارد که رنگ هر سه رأسش یکسان است.

دومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۷

مسألة ۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادله

$$z^{n+1} - z^n - 1 = 0$$

ریشه‌ای دارد که در $|z| = 1$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر $n + 2$ بر ۶ بخش پذیر باشد.

مسألة ۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع n با ترسیم خط‌هایی موازی با ضلع‌هایش به n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم شده است. هر نقطه‌ای که رأس دست‌کم یکی از این مثلث‌های یک‌ه است با عددی حقیقی برچسب خورده است. رأس‌های A ، B و C به ترتیب با a ، b و c برچسب خورده‌اند. در هر لوزی که از ترکیب دو مثلث یک‌ه که در ضلعی مشترک‌اند تشکیل شده است، مجموع برچسب‌های روی مجموعه‌های رأس‌های روبه‌رو با هم برابر است.

الف) کوتاه‌ترین فاصله را میان نقطه‌ای که برچسبش بزرگترین عدد است با نقطه‌ای که برچسبش کوچکترین عدد است تعیین کنید.

ب) مجموع برچسب‌ها را تعیین کنید.

مسألة ۳. در یک دوره مسابقه هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند. هیچ‌یک از بازی‌ها به تساوی نمی‌انجامد. بازیکنی مانند A به شرطی جایزه می‌گیرد که به‌ازای هر بازیکن دیگری مانند B ، یا A از B برده باشد یا A از بازیکنی مانند C برده باشد که او از B برده است. ثابت کنید که اگر فقط یک بازیکن جایزه برده باشد، این بازیکن از بقیه بازیکنها برده است.

مسأله ۴. ۵ نقطه درون مثلثی متساوی الاضلاع به مساحت ۱ مفروض اند. ثابت کنید سه مثلث متساوی الاضلاع وجود دارند که با مثلث مفروض متشابه اند، هریک از این ۵ نقطه درون دستکم یکی از این سه مثلث قرار دارد و مجموع مساحتهای آنها حداکثر $\frac{1}{64}$ است.

مسأله ۵. کره‌ای به مرکز O بر هریک از شش یال چهاروجهی مماس است. علاوه بر این، چهار کره به مرکزهای رأسهای چهاروجهی وجود دارند که هریک از آنها بر یکی دیگر مماس است و همگی بر کره‌ای دیگر به مرکز O مماس اند. ثابت کنید این چهاروجهی منتظم است.

مسأله ۶. مجموع m عدد طبیعی زوج و n عدد طبیعی فرد ۱۹۸۷ است. بیشترین مقدار $3m + 4n$ چقدر است؟

سومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸

مسئله ۱. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهایی حقیقی باشند و دستکم یکی از آنها غیر صفر باشد. عددهای حقیقی $r_1, r_2, \dots, r_n$ چنان‌اند که به ازای هر دنباله از عددهای حقیقی مانند $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \dots + r_n(x_n - a_n)$$

از

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. $r_1, r_2, \dots, r_n$ را پیدا کنید.

مسئله ۲. دو دایره هم‌مرکز مفروض‌اند و شعاع یکی از آنها دو برابر شعاع دیگری است. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایره کوچکتر محاط شده است. امتدادهای AB, BC, CD, DA دایره بزرگتر را به ترتیب در نقطه‌های C_1, D_1, A_1, B_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید محیط $A_1B_1C_1D_1$ از دو برابر محیط $ABCD$ کمتر نیست و تعیین کنید که چه وقت این محیطها برابرند.

مسئله ۳. دنباله‌ای از n عدد حقیقی مفروض است. هر قطعه از جمله‌های متوالی را که میانگینشان از ۱۹۸۸ بیشتر است اژدها، و اولین جمله در این قطعه را سر اژدها می‌نامیم. هر تک جمله‌ای که از ۱۹۸۸ بیشتر است نیز اژدها و سر اژدهاست. فرض کنید دستکم یک اژدها وجود داشته باشد. ثابت کنید میانگین همه جمله‌هایی که سر اژدها هستند از ۱۹۸۸ بیشتر است.

مسألهٔ ۴. الف) فرض کنید a_1, a_2, a_3 عددهایی حقیقی و مثبت باشند که در نابرابری

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید a_1, a_2, a_3 طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

ب) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ باشد. فرض کنید به‌ازای عددهایی حقیقی و مثبت مانند $a_1, a_2, \dots, a_n$ نابرابری

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

درست باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر i ، هر j و هر k ، a_i, a_j, a_k طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

مسألهٔ ۵. سه چهاروجهی $A_i B_i C_i D_i$ ، $1 \leq i \leq 3$ ، مفروض‌اند. از نقطه‌های B_i, C_i, D_i سه صفحهٔ $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ به‌ترتیب بر $A_i B_i, A_i C_i$ و $A_i D_i$ عمود شده‌اند. اگر این سه صفحه در یک نقطه متقاطع باشند و A_1, A_2, A_3 روی یک خط قرار داشته باشند، اشتراک کره‌های محیطی این سه چهاروجهی را تعیین کنید.

مسألهٔ ۶. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $n \geq 3$ ، فرض کنید $f(n)$ کوچکترین عدد طبیعی باشد که مقسوم‌علیه n نیست. فرض کنید $f^{(1)}(n) = f(n)$. اگر $f^{(k)}(n) \geq 3$ ، $f^{(k)}(n)$ ، $f(f^{(k)}(n))$ بامعنی است و آن را $f^{(k+1)}(n)$ تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ، $n \geq 3$ ، k را طوری تعیین کنید که $f^{(k)}(n) = 2$.

چهارمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۹

مسأله ۱. هر یک از A و B اجتماع کمانهایی دوه‌دو مجزا روی دایره واحد است. علاوه بر این، طول هر کمان در B برابر با $\frac{\pi}{m}$ است، که در اینجا m عددی طبیعی و ثابت است. مجموعه‌ای را که از دوران A در جهت پادساعتگرد حول مرکز دایره به اندازه $j\frac{\pi}{m}$ رادیان به دست می‌آید با A^j نشان می‌دهیم. ثابت کنید عددی طبیعی مانند k وجود دارد که

$$l(A^k \cap B) \geq \frac{l(A)l(B)}{2\pi}$$

که در آن $l(X)$ برابر با مجموع طول کمانهای مجزای مجموعه X است.

مسأله ۲. فرض کنید

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ و x_n عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

مسأله ۳. فرض کنید S دایره واحد در صفحه مختلط باشد. فرض کنید $f: S \rightarrow S$ با $f(x) = x^m$ تعریف شده باشد، که در آن m عددی طبیعی است. فرض کنید

$$f^{(0)}(z) = z, \quad f^{(k+1)}(z) = f\left(f^{(k)}(z)\right), \quad k \geq 0$$

کوچکترین عدد طبیعی مانند n را که $f^{(n)}(z) = z$ ، دوره تناوب z می‌نامیم. تعداد همه نقطه‌های S را که دوره تناوب آنها ۱۹۸۹ است حساب کنید.

مسئله ۴. شعاع دایره محاطی مثلث ABC برابر با r است. نقطه‌های D ، E و F به ترتیب روی ضلعهای BC ، CA و AB قرار دارند. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای AEF ، BFD و CDE برابر باشد، ثابت کنید این شعاع برابر با $r - r'$ است، که در اینجا r' شعاع دایره محاطی مثلث DEF است.

مسئله ۵. ۱۹۸۹ نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه‌تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند. چگونه باید این نقطه‌ها را به ۳۰ گروه به اندازه‌های مختلف افراز کرد تا تعداد کل مثلثهایی که رأسهایشان در گروه‌های مختلف‌اند بیشترین مقدار ممکن باشد؟

مسئله ۶. فرض کنید S مجموعه همه عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ باشد. همه تابعها مانند $f : S \rightarrow S$ را پیدا کنید، به طوری که به ازای همه عددهای حقیقی مانند x ، y ، m و n ، که $x, y > 1$ و $m, n > 0$ ،

$$f(x^m y^n) \leq f(x)^{\frac{1}{m}} f(y)^{\frac{1}{n}}$$

پنجمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۰

مسألة ۱. $ABCD$ چهارضلعی محدب است و AB با CD موازی نیست. دایره‌ای از A و B می‌گذرد و بر CD در نقطه P مماس است و دایره‌ای هم از C و D می‌گذرد و بر AB در نقطه Q مماس است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی وتر مشترک این دو دایره AD را نصف می‌کند که AD با BC موازی باشد.

مسألة ۲. به ازای عدد طبیعی معلوم x, D -زنجیری از x به طول d دنباله‌ای مانند

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_d$$

است که

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_d = x$$

و x_i, x_{i+1} را می‌شمارد ($1 \leq i \leq d-1$). برای عدد $1990^n \times 31^m \times 5^k$ که در آن k, m و n عددهایی طبیعی‌اند، بلندترین طول D -زنجیرها و تعداد D -زنجیرهای به این طول را پیدا کنید.

مسألة ۳. درباره تابع حقیقی -مقدار f که به ازای همه عددهای حقیقی نامنفی تعریف شده است، می‌دانیم که به ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی مانند x و y ,

$$f(x)f(y) \leq y^2 f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

و عددی ثابت مانند M وجود دارد که به ازای هر $x, 0 \leq x \leq 1$, $|f(x)| \leq M$ ثابت کنید
 $x^2 \leq f(x) \leq x$.

مسأله ۴. فرض کنید a عددی طبیعی باشد و A و B عددهایی حقیقی باشند. دستگاه معادله‌های

$$x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = (2A + B) \frac{(13a)^4}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2$$

را در نظر بگیرید. شرطی لازم و کافی درباره A و B پیدا کنید که این دستگاه معادله‌ها در مجموعه عددهای طبیعی (برحسب x, y و z) جواب داشته باشد.

مسأله ۵. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی باشد و $E(X)$ گردایه زیرمجموعه‌هایی از X باشد که تعداد عضوهایشان عددی زوج است. تابع حقیقی-مقدار f روی $E(X)$ طوری تعریف شده است که دستکم به ازای یک عضو از $E(X)$ مانند D ، $f(D) > 1990$ و به ازای هر دو عضو جدا از هم $E(X)$ مانند A و B ،

$$f(A \cap B) = f(A) + f(B) - 1990$$

ثابت کنید می‌توان X را به دو زیرمجموعه جدا از هم مانند P و Q افراز کرد، به طوری که به ازای هر عضو ناتهی از $E(P)$ مانند S ، $f(S) > 1990$ و به ازای هر عضو از $E(Q)$ مانند T ، $f(T) \leq 1990$.

مسأله ۶. هر n ضلعی محدب را می‌توان با ترسیم $(n-3)$ تا از قطرهایش که هیچ دوتایی از آنها جز در رأسها متقاطع نیستند به $n-2$ مثلث افراز کرد. ثابت کنید همه ضلعها و قطرهای چنین افرازی را می‌توان روی مسیر چندضلعی بسته و پیوسته‌ای بی‌آنکه از قسمتی از مسیر بیش از یک بار عبور کنیم طی کرد، اگر و فقط اگر n مضربی از ۳ باشد.

ششمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۱

مسأله ۱. اگر نقطه‌ای مانند P در صفحه چهارضلعی محدب $ABCD$ وجود داشته باشد که مساحت مثلث‌های ABP ، BCP ، CDP و DAP برابر باشند، ویژگی مشخص چهارضلعی $ABCD$ چیست؟ حداکثر چند نقطه مانند P ممکن است وجود داشته باشد؟

مسأله ۲. همه تابعها مانند $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را پیدا کنید، به طوری که به ازای هر x, y و z در $[0, 1]$ ،

$$f(x, 1) = x$$

$$f(1, y) = y$$

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

و به ازای عددی ثابت و مثبت و مستقل از x, y و z مانند k ،

$$f(zx, zy) = z^k f(x, y)$$

مسأله ۳. ده پرندۀ کوچک از زمینی هموار دانه برمی‌چینند. از هر پنج پرندۀ دست‌کم چهارتا روی یک دایره قرار دارند. کمترین مقدار بیشترین تعداد از این ده پرندۀ که ممکن است روی یک دایره باشند چقدر است؟

مسأله ۴. همه چهارتاییها از عددهای طبیعی مانند (n, x, y, z) را طوری پیدا کنید که

$$n \geq 2, \quad z \leq 5 \times 2^{2n}, \quad x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1}$$

مسئله ۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که ۱۹۹۱ کمترین مقدار

$$k^2 + \left\lceil \frac{n}{k^2} \right\rceil$$

باشد، که در اینجا k در میان مجموعهٔ عددهای طبیعی تغییر می‌کند.

مسئله ۶. هر رأس چندوجهی محدب روی دقیقاً سه یال قرار دارد و می‌توان یالها را با سه رنگ طوری رنگ کرد که هر رأس، روی یک یال از هر رنگ قرار داشته باشد. ثابت کنید می‌توان به هر رأس عددی مختلط و مخالف ۱ نسبت دارد، به طوری که حاصل ضرب عددهای روی رأسهای هر وجه برابر با ۱ باشد.

هفتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۲

مسألهٔ ۱. فرض کنید $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ عددهایی حقیقی باشند و

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq 1$$

فرض کنید λ ریشه‌ای مختلط از معادلهٔ

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

باشد و $|\lambda| \geq 1$. ثابت کنید $\lambda^{n+1} = 1$.

مسألهٔ ۲. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ و a کوچکترین این عددها باشد. ثابت کنید

$$\frac{1+x_1}{1+x_2} + \frac{1+x_2}{1+x_3} + \dots + \frac{1+x_{n-1}}{1+x_n} + \frac{1+x_n}{1+x_1}$$

از

$$n + \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{(1+a)^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. همچنین، ثابت کنید برابری وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

مسألهٔ ۳. به هریک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 9×9 در ابتدا به دلخواه ۱ یا -۱ رانسبت می‌دهیم.

به ازای هر خانه مانند C ، حاصل ضرب عددهای خانه‌هایی را حساب کنید که دقیقاً یک ضلع مشترک با C دارند و بعد همه این عددها را با مقدار این حاصل ضرب جایگزین کنید. آیا می‌توان این کار را چند بار (متناهی) انجام داد و همه ۸۱ عدد را به ۱ تبدیل کرد؟

مسئله ۴. چهارضلعی محذب $ABCD$ در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. قطرهای AC و BD این چهارضلعی یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند. دایره‌های محیطی مثلثهای ABP و CDP برای بار دوم یکدیگر را در نقطه Q قطع کرده‌اند. اگر O ، P و Q سه نقطه متمایز باشند، ثابت کنید OQ بر PQ عمود است.

مسئله ۵. گرافی ۸ رأسی داریم که طوق، یال چندگانه یا دوری به طول ۴ ندارد. این گراف حداکثر چند یال ممکن است داشته باشد؟

مسئله ۶. فرض کنید a_0 و a_1 عددهایی صحیح باشند. دنباله $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است:

$$a_2 = 2a_1 - a_0 + 2 \text{ و اگر } n \geq 2$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}$$

اگر به ازای هر عدد طبیعی مانند m ، این دنباله شامل m جمله متوالی باشد که همه آنها مربع کامل‌اند، ثابت کنید هر عضو این دنباله مربع کامل است.

هشتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۳

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید $2n$ عدد صحیح مانند $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ وجود دارند که به ازای هر عدد طبیعی مانند $k, k < n$ ، هیچ دو تایی از $3n$ عدد صحیح

$$a_i + a_{i+1}, \quad a_i + b_i, \quad a_i + b_{i+k}, \quad 1 \leq i \leq n$$

که در آنها اندیسها را به پیمانه n حساب می‌کنیم، به پیمانه $3n$ همنهشت نیستند.

مسألهٔ ۲. فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی و مثبت باشد. بیشترین مقدار

$$a^{k(1)} + a^{k(2)} + \dots + a^{k(s)}$$

را تعیین کنید. که در اینجا s عددی طبیعی است، $s \leq n$ و $k(1), k(2), \dots, k(s)$ و $k(s)$ عددهایی طبیعی‌اند که مجموعشان برابر با n است.

مسألهٔ ۳. شعاعهای دو دایرهٔ هم‌مرکز برابر با R و R_1 است و $R_1 > R$. چهارضلعی $ABCD$ در دایرهٔ کوچکتر و چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ در دایرهٔ بزرگتر محاط شده است و A_1 بر امتداد CD ، B_1 بر امتداد DA ، C_1 بر امتداد AB و D_1 بر امتداد BC قرار دارد. ثابت کنید

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_1^2}{R^2}$$

مسألهٔ ۴. فرض کنید S مجموعه‌ای از ۱۹۹۳ بردار غیرصفر در صفحه باشد. ثابت کنید گردایه‌ای از

زیرمجموعه‌های ناتهی S وجود دارد که ویژگیهای زیر را دارند:

۱. هر بردار S متعلق به دقیقاً یکی از این زیرمجموعه‌هاست.
۲. زاویهٔ میان هر بردار در هر زیرمجموعه و بردار برابنده این زیرمجموعه حداکثر برابر با 90° است.
۳. زاویهٔ میان برابندهای هر دو زیرمجموعه از 90° بیشتر است.

مسألهٔ ۵. ده نفر رفته‌اند کتاب بخزند. می‌دانیم

۱. هر یک از آنها سه کتاب مختلف خریده است.
 ۲. هر دوتا از آنها دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند.
- کتابی را در نظر بگیرید که تعداد بیشتری از این ده نفر آن را خریده‌اند. کمترین مقدار این بیشترین تعداد چقدر است؟

مسألهٔ ۶. فرض کنید f تابعی از مجموعهٔ عددهای حقیقی و مثبت به همین مجموعه باشد، به‌طوری که به‌ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت مانند x و y ،

$$f(xy) \leq f(x)f(y)$$

ثابت کنید به‌ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x و هر عدد طبیعی مانند n ،

$$f(x^n) \leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \dots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

نهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۴

مسألهٔ ۱. الف) فرض کنید $ABCD$ دوزنقه‌ای باشد که در آن AB و CD موازی‌اند. فرض کنید E و F نقطه‌هایی به ترتیب روی AB و CD باشند. اگر BF, CE را در نقطهٔ H و AF, ED را در نقطهٔ G قطع کند، ثابت کنید مساحت $EGFH$ حداکثر $\frac{1}{4}$ مساحت $ABCD$ است.

ب) اگر $ABCD$ چهارضلعی محدب دلخواهی باشد، آیا حکم قسمت الف) باز هم درست است؟

مسألهٔ ۲. دست کم چهار شکلات در n ظرف گذاشته‌ایم ($n \geq 4$). در هر حرکت دو ظرف غیر خالی را انتخاب می‌کنیم، از هر کدام شکلاتی برمی‌داریم و این دو شکلات را در ظرفی دیگر می‌گذاریم. آیا می‌توانیم چند بار (متناهی) این حرکت را انجام دهیم و همهٔ شکلاتها را در یک ظرف قرار دهیم؟

مسألهٔ ۳. همهٔ تابعها مانند $f: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ را پیدا کنید که به ازای هر x در بازهٔ $[1, +\infty)$

$$f(x) \leq 2(x+1)$$

و

$$f(x+1) = \frac{1}{x} \left((f(x))^2 - 1 \right)$$

مسألهٔ ۴. ثابت کنید به ازای هر چند جمله‌ای با ضریبهای مختلط مانند

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$$

عددی مختلط مانند z_0 وجود دارد که $1 \leq |z_0|$ و

$$|f(z_0)| \geq |c_0| + |c_n|$$

مسئله ۵. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند n ,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n-k}{2} \right\rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

مسئله ۶. فرض کنید M نقطه‌ای به مختصات $(1994p, 7 \times 1994p)$ باشد، که در آن p عددی اول است. تعداد مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که رأس زاویه قائمه آنها در نقطه M است، مختصات رأسهای دیگرشان عددهایی صحیح‌اند و مرکز دایره محاطی آنها مبدأ مختصات است.

دهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۵

مسئله ۱. فرض کنید $2n$ عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ و $(n \geq 3)$ در شرطهای زیر صدق می‌کنند:

$$(الف) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$(ب) \quad a_1 = a_2 < 0, \quad a_i + a_{i+1} = a_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

$$(ج) \quad b_1 \leq b_2 < 0, \quad b_i + b_{i+1} \leq b_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2$$

ثابت کنید

$$a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$$

مسئله ۲. درباره تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ می‌دانیم $f(1) = 1$ و به ازای هر عدد طبیعی مانند n ,

$$(الف) \quad 3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1+3f(n))$$

$$(ب) \quad f(2n) < 6f(n)$$

همه جوابهای معادله $f(k) + f(l) = 293$, $k < l$ را پیدا کنید.

مسئله ۳. کمترین مقدار عبارت

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} |k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

را پیدا کنید، که در آن x و y عددهایی حقیقی اند.

مسئله ۴. شعاعهای چهارگلوله به ترتیب ۲، ۲، ۳ و ۳ است. هر گلوله بر سه تایی دیگر مماس است. گلوله کوچک دیگری بر هر یک از این چهارگلوله مماس است. شعاع این گلوله چقدر است؟

مسئله ۵. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ عددهایی طبیعی و متمایز باشند که مجموعشان ۱۹۹۵ است. کمترین مقدار عبارت

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_9 a_{10} + a_{10} + a_1$$

چقدر است؟

مسئله ۶. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد و

$$X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (1, 0, \dots, 0, 1)$$

فرض کنید، به ازای $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & x_i^{(k-1)} = x_{i+1}^{(k-1)} \\ 1 & x_i^{(k-1)} \neq x_{i+1}^{(k-1)} \end{cases}$$

که در آن

$$x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}$$

فرض کنید

$$X_n = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

ثابت کنید اگر m عددی طبیعی باشد و $X_m = X_n$ ، آن وقت m مضرب n است.

یازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶

مسألهٔ ۱. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث حادهٔ ABC باشد. مماسهایی که از نقطهٔ A بر دایرهٔ به قطر BC رسم شده‌اند، در نقطه‌های P و Q بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید نقطه‌های P ، Q و H روی یک خط راست قرار دارند.

مسألهٔ ۲. کوچکترین عدد طبیعی مانند k را پیدا کنید که هر زیرمجموعهٔ k عضوی مجموعهٔ $\{1, 2, \dots, 50\}$ ، شامل دو عضو متمایز مانند a و b باشد که ab بر $a + b$ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که به‌ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y ،

$$f(x^3 + y^3) = (x + y) \left(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2 \right)$$

ثابت کنید که به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x ، $f(1996x) = 1996f(x)$.

مسألهٔ ۴. هشت خواننده در یک جشنوارهٔ هنری که m آواز در آن خوانده می‌شود شرکت کرده‌اند. هر آواز را چهار خواننده خوانده‌اند و تعداد آوازهایی که هر دو خواننده هر دو خواننده‌اند یکسان است. کوچکترین مقدار m را طوری پیدا کنید که چنین کاری ممکن باشد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $x_0 = 0$ ، $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددهایی مثبت باشند و $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. ثابت کنید

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\dots+x_{i-1}} \sqrt{x_i+\dots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

مسأله ۶. در مثلث ABC ، $\angle C = 90^\circ$ ، $\angle A = 30^\circ$ و $BC = 1$. کمترین مقدار ممکن طول بلندترین ضلع مثلی را پیدا کنید که در مثلث ABC محاط شده است (یعنی هر رأسش روی یک ضلع مثلث ABC قرار دارد).

دوازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۷

مسأله ۱. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ عددهایی حقیقی باشند و

$$(الف) \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3}, \quad 1 \leq i \leq 1997;$$

$$(ب) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{1997} = -318\sqrt{3}.$$

بیشترین مقدار ممکن $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2$ را پیدا کنید.

مسأله ۲. فرض کنید $A_1B_1C_1D_1$ چهارضلعی محدب و P نقطه‌ای درون آن باشد. فرض کنید

زاویه‌های PA_1B_1 و PA_1D_1 حاده باشند و همین‌طور در مورد سه رأس دیگر. A_k, B_k, C_k, D_k را به ترتیب قرینه‌های P نسبت به $A_{k-1}B_{k-1}, A_{k-1}C_{k-1}, B_{k-1}D_{k-1}, C_{k-1}D_{k-1}$ بگیرد.

(الف) از چهارضلعیهای $A_kB_kC_kD_k$ ، $1 \leq k \leq 12$ ، کدامیک لزوماً با چهارضلعی ۱۹۹۷ام متشابه است؟

(ب) فرض کنید چهارضلعی ۱۹۹۷ام محاطی باشد. کدامیک از ۱۲ چهارضلعی نخست هم محاطی است؟

مسأله ۳. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد به طوری که می‌توان عددهای ۱، ۲، $\dots$ و $3n$ را به ترتیبی با

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$$

طوری برچسب زد که

الف) $a_1 + b_1 + c_1, \dots, a_n + b_n + c_n$ با هم برابر باشند و هریک از آنها بر ۶ بخش پذیر باشد.
 ب) $a_1 + \dots + a_n, b_1 + \dots + b_n, c_1 + \dots + c_n$ هم با هم برابر باشند و هریک از آنها بر ۶ بخش پذیر باشد.

مسأله ۴. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد. خطهای AB و CD در نقطه P و خطهای AD و BC در نقطه Q یکدیگر را قطع کرده اند. فرض کنید E و F نقطه های تماس مماسهای مرسوم از نقطه Q بر دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید نقطه های P, E و F روی یک خط راست قرار دارند.

مسأله ۵. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 17\}$ و به ازای هر تابع مانند $f: A \rightarrow A$ فرض کنید $f^{[1]}(x) = f(x)$ و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$f^{[k+1]}(x) = f(f^{[k]}(x))$$

بزرگترین عدد طبیعی مانند M را طوری پیدا کنید که تابعی یک به یک و پوشا مانند $f: A \rightarrow A$ وجود داشته باشد که

الف) اگر $m < M$ و $1 \leq i \leq 17$ ، آنگاه

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm 1 \pmod{17} \text{ (به پیمانه ۱۷)}$$

ب) به ازای $1 \leq i \leq 17$ ،

$$f^{[M]}(i+1) - f^{[M]}(i) \equiv \pm 1 \pmod{17} \text{ (به پیمانه ۱۷)}$$

در اینجا $(f^{[k]})(1) = f^{[k]}(1)$.

مسأله ۶. فرض کنید $a_1, a_2, \dots$ عددهایی نامنفی باشند و

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad m, n \geq 1$$

ثابت کنید اگر $n \geq m$

$$a_n \leq m a_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right) a_m$$

سیزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۸

مسئله ۱. فرض کنید ABC مثلثی غیرمنفرجه باشد، $AB > AC$ و $\angle B = 45^\circ$. فرض کنید O و I به ترتیب مرکز دایره محیطی و مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشند. فرض کنید $\sqrt{2}OI = AB - AC$. همه مقادیرهای ممکن $\sin A$ را پیدا کنید.

مسئله ۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$. آیا $2n$ عدد طبیعی متمایز مانند $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ وجود دارند که

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad (\text{الف})$$

$$n-1 > \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n-1 - \frac{1}{1998} \quad (\text{ب})$$

مسئله ۳. فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, 98\}$. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که به ازای هر زیرمجموعه n عضوی از S مانند T بتوان زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی از T پیدا کرد که هر طور که آن را به دو زیرمجموعه پنج‌عضوی افزایش دهیم، در یکی از آنها عضو وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول باشد و در دیگری عضو وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول نباشد.

مسئله ۴. همه عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $n \geq 3$ و 2^{2000} بر

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

بخش پذیر باشد.

مسألهٔ ۵. فرض کنید D نقطه‌ای درون مثلث حادهٔ ABC باشد و

$$DA \times DB \times AB + DB \times DC \times BC + DC \times DA \times CA = AB \times BC \times CA$$

جای نقطهٔ D را مشخص کنید.

مسألهٔ ۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددهایی حقیقی باشند و

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1$$

به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، $k \leq n$ ، بیشترین مقدار $|x_k|$ را پیدا کنید.

چهاردهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۹

مسأله ۱. فرض کنید ABC مثلثی حاده باشد و $\angle C > \angle B$. فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد، زاویه ADB منفرجه باشد و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABD باشد. فرض کنید F نقطه‌ای درون مثلث ABC و روی دایره محیطی مثلث ABD باشد. ثابت کنید F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است، اگر و فقط اگر HD و CF موازی باشند و H روی دایره محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد.

مسأله ۲. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. فرض کنید $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها باشد به طوری که $f(x) = 1$ و

$$f_{n+1}(x) = x f_n(x) + f_n(ax), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(الف) ثابت کنید

$$f_n(x) = x^n f_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(ب) عبارتی صریح برای $f_n(x)$ پیدا کنید.

مسأله ۳. ۹۹ ایستگاه فضایی وجود دارد. هر دو تا از این ایستگاههای فضایی با تونلی به هم وصل‌اند. ۹۹ تونل دوطرفه اصلی وجود دارد و بقیه تونلها یک طرفه‌اند. گروهی از ۴ ایستگاه فضایی را همبند می‌نامیم، هرگاه بتوان از هر یک از ایستگاههای این گروه به هر یک از بقیه ایستگاههای دیگر این گروه

رفت، به طوری که فقط از ۶ تونلی که آنها را به هم وصل می‌کنند استفاده شود. بیشترین تعداد گروههای همبند را مشخص کنید.

مسئله ۴. فرض کنید m عددی طبیعی باشد. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a ، b و k وجود دارند که a و b هر دو فردند، k منفی نیست و

$$2m = a^{19} + b^{19} + k \times 2^{1999}$$

مسئله ۵. بیشترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که اگر ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سوم

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

همگی نامنفی باشند، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی و نامنفی مانند x ،

$$f(x) \geq \lambda(x - a)^3$$

در چه صورتی تساوی پیش می‌آید؟

مسئله ۶. مکعبی $4 \times 4 \times 4$ از ۶۴ مکعب واحد تشکیل شده است. وجه‌های ۱۶ تا از این مکعبها را قرمز می‌کنیم. رنگ آمیزی را جالب می‌نامیم، هرگاه در هر جعبه مستطیلی $1 \times 1 \times 4$ که از ۴ مکعب واحد تشکیل شده است فقط یک مکعب قرمز وجود داشته باشد. تعداد رنگ آمیزیهای جالب را پیدا کنید (اگر حتی بتوان رنگ آمیزی را با یک سری دوران از رنگ آمیزی دیگری به دست آورد، این دو متمایزند).

پانزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۲۰۰۰

مسألهٔ ۱. در مثلث ABC ، $BC \leq CA \leq AB$. فرض کنید R و r به ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. برحسب مقدار $\angle C$ مشخص کنید که $BC + CA - 2R - 2r$ چه وقت مثبت، منفی یا صفر است.

مسألهٔ ۲. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این طور تعریف شده است: $a_1 = 0$ ، $a_2 = 1$ و اگر $n \geq 3$

$$a_n = \frac{1}{4}na_{n-1} + \frac{1}{4}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n \left(1 - \frac{n}{4}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + 2\binom{n}{1}a_{n-1} + 3\binom{n}{2}a_{n-2} + \cdots + n\binom{n}{n-1}a_1$$

پیدا کنید.

مسألهٔ ۳. یک باشگاه تنیس روی میز می‌خواهد یک دوره مسابقات دو نفره برگزار کند، یعنی یک سری مسابقه که در هر یک دو نفر بازیکن با دو نفر دیگر مسابقه می‌دهند. تعداد بازیهای هر بازیکن در این دوره، تعداد بازیهایی است که در آنها شرکت کرده است. مجموعهٔ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ از عددهای طبیعی متمایز که هر کدام بر ۶ بخش پذیر است مفروض است. کمترین تعداد بازیکنانی را پیدا کنید که می‌توان در میان آنها یک دوره مسابقات دو نفره ترتیب داد به طوری که

(الف) هر دو تیم دونفرهٔ مختلف حداکثر یک بار با هم بازی کنند.

(ب) اگر دو بازیکن عضو یک تیم دونفره باشند، هیچگاه در مقابل هم بازی نکنند.

(د) مجموعه تعداد بازیهای بازیکنان مجموعه A باشد.

مسئله ۴. عدد طبیعی n مفروض است و $n \geq 2$. بهازای هر n تایی مرتب از عددهای حقیقی مانند $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، فرض کنید نمره تسلط A تعداد عددهایی مانند k در مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که بهازای هر j که $1 \leq j \leq k$ ، $a_k > a_j$. همه جایگشتهای $(1, 2, \dots, n)$ مانند $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ را در نظر بگیرید که نمره تسلط آنها ۲ است. میانگین حسابی عضوهای اول این جایگشتها (یعنی میانگین حسابی a_1 ها) را پیدا کنید.

مسئله ۵. همه عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که عددهایی طبیعی مانند $n_1, n_2, \dots, n_k$ همگی بزرگتر از ۳ وجود داشته باشند که

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{\frac{1}{k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1$$

مسئله ۶. یک برگه امتحانی شامل ۵ سؤال چندگزینه‌ای است که هر کدام چهار گزینه مختلف دارد. ۲۰۰۰ دانش‌آموز در امتحان شرکت کرده‌اند و هر دانش‌آموز فقط یکی از گزینه‌های هر سؤال را انتخاب می‌کند. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان برگه‌های امتحانی هر n دانش‌آموز، ۴ برگه وجود داشته باشد که در هر دوتا از آنها حداکثر سه پاسخ یکسان باشند.

راہِ حلبا

اولین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۶

مسأله ۱. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهایی حقیقی باشند. ثابت کنید دو حکم زیر هم‌ارزند:

(الف) به‌ازای هر i و j که $i \neq j$ ، $a_i + a_j \geq 0$ ؛

(ب) $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$ که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ و x_n عددهای حقیقی غیرمنفی دلخواهی هستند که

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

راه‌حل اول

می‌توان نوشت

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k = \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^n a_k x_k^2 + \sum_{i \neq j} (a_i + a_j) x_i x_j$$

اگر فرض کنیم (الف) درست باشد، $\sum_{i \neq j} (a_i + a_j) x_i x_j \geq 0$ ، در نتیجه

$$\sum_{k=1}^n a_k x_k \geq \sum_{k=1}^n a_k x_k^2$$

اکنون فرض می‌کنیم (ب) درست باشد. به‌ازای دو عدد طبیعی متمایز مانند i و j ، $1 \leq i, j \leq n$ ،

فرض کنید $\frac{1}{p}$ و به ازای هر عدد طبیعی دیگر مانند k ، فرض کنید $x_k = 0$. از (ب) نتیجه می شود

$$\frac{a_i + a_j}{2} \geq \frac{a_i + a_j}{4}$$

که یعنی $a_i + a_j \geq 0$.

راه حل دوم

برای اثبات اینکه (الف) از (ب) نتیجه می شود، مانند راه حل اول استدلال می کنیم. اکنون فرض می کنیم (الف) درست باشد و درستی (ب) را به استقرا روی n ثابت می کنیم. اگر $n = 2$

$$x_1 = 1 - x_2, \quad x_2 = 1 - x_1$$

بنابراین

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 - (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2) &= a_1 x_1(1 - x_1) + a_2 x_2(1 - x_2) \\ &= (a_1 + a_2)x_1 x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

فرض کنید نتیجه به ازای n ای، $n \geq 2$ ، درست باشد. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ عددهایی حقیقی و غیرمنفی باشند که $\sum_{k=1}^{n+1} x_k = 1$. اگر $x_{n+1} = 1$ آن وقت

$$x_k = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

و نتیجه موردنظر از اینکه $a_{n+1} \geq a_{n+1}$ به دست می آید. اگر $x_{n+1} < 1$ آن وقت

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{1 - x_{n+1}} = 1$$

بنابر فرض استقرا،

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k x_k}{1 - x_{n+1}} \geq \sum_{k=1}^n a_k \left(\frac{x_k}{1 - x_{n+1}} \right)^2$$

این نابرابری با نابرابری

$$(1 - x_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k x_k \geq \sum_{k=1}^n a_k x_k^2$$

هم ارز است. در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k &= (1 - x_{n+1}) \sum_{k=1}^n a_k x_k + x_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k x_k \\ &\quad + a_{n+1} x_{n+1} (1 - x_{n+1}) + a_{n+1} x_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k^2 + x_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k x_k + a_{n+1} x_{n+1} \sum_{k=1}^n x_k \\ &\geq \sum_{k=1}^{n+1} a_k x_k^2 \end{aligned}$$

زیرا $0 \leq (a_k + a_{n+1})x_k x_{n+1}$. این نتیجه استدلال استقرایی را کامل می‌کند.

مسأله ۲. D, E, F نقطه‌هایی روی ضلع BC از مثلث ABC اند و AD, AE و AF به ترتیب ارتفاع، نیمساز و میانه این مثلث‌اند. اگر $AD = 12, AE = 13$ و $AF = m$ ، تعیین کنید که به ازای چه مقدارهایی از m ، زاویه BAC

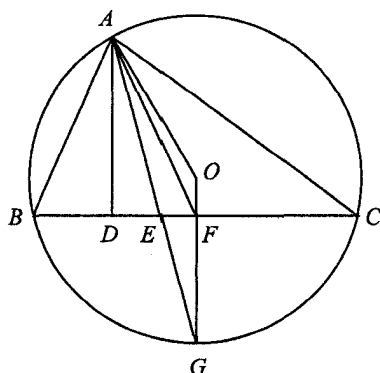
الف) حاده است؛

ب) قائمه است؛

ج) منفرجه است.

راه حل

چون $AD \neq AE$ ، پس $AB \neq AC$. می‌توانیم فرض کنیم $AB < AC$ ، بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که D میان B و F قرار دارد. در دایره محیطی مثلث ABC ، قطری عمود بر BC رسم می‌کنیم تا این دایره را در نقطه‌ای مانند G روی کمانی از دایره که دو سرش B و C هستند و شامل A نیست قطع کند. در این صورت، اگر مرکز دایره محیطی مثلث ABC را O بنامیم، O, F و G همخط‌اند، همین‌طور A, E و G . بنابراین E میان D و F قرار دارد و در نتیجه $m > 13$.



شکل ۱

به این ترتیب

$$DE = 5, \quad EF = DF - DE = \sqrt{m^2 - 144} - 5$$

چون مثلثهای ADE و GFE متشابه‌اند،

$$FG = \frac{AD \times EF}{DE} = \frac{12}{5} (\sqrt{m^2 - 144} - 5)$$

(الف) اگر $\angle BAC < 90^\circ$ ، آن وقت F میان O و G قرار دارد. بنابراین

$$AF > AO = GO > FG$$

و یا

$$m > \frac{12}{5} (\sqrt{m^2 - 144} - 5)$$

نابرابری اخیر هم ارز $(m + 12)(119m - 2028) < 0$ است و در نتیجه $m < \frac{2028}{119}$. به این ترتیب

$$13 < m < \frac{2028}{119}$$

(ب) اگر $\angle BAC = 90^\circ$ ، آن وقت O و F بر هم منطبق‌اند و $AF = FG$. به این ترتیب

$$m = \frac{2028}{119}$$

(ج) اگر $\angle BAC > 90^\circ$ ، آن وقت O میان F و G قرار دارد. از $AF < FG$ نتیجه می‌گیریم

$$m = \frac{2028}{119}$$

مسألهٔ ۳. فرض کنید $z_1, z_2, \dots, z_n$ عددهایی مختلط باشند و

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = 1$$

ثابت کنید زیرمجموعه‌ای از $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ وجود دارد که مجموع عضوهایش، که آن را S می‌نامیم، در نابرابری $|S| \geq \frac{1}{e}$ صدق می‌کند.

راه حل اول

می‌توانیم فرض کنیم که بازای هر $k, 1 \leq k \leq n$ ، $z_k \neq 0$ در این صورت

$$z_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k), \quad r_k > 0, \quad -180^\circ < \theta_k \leq 180^\circ$$

این n عدد مختلط را به سه زیرمجموعه تقسیم می‌کنیم که به ترتیبی از عددهایی تشکیل شده‌اند که در $180^\circ < \theta_k \leq 60^\circ$ ، $60^\circ < \theta_k \leq -60^\circ$ و $-60^\circ < \theta_k \leq -180^\circ$ صدق می‌کنند. از اصل لانه کبوتری نتیجه می‌شود که مجموع قدرمطلقهای عضوهای دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌ها

دستکم $\frac{1}{3}$ است. می‌توانیم فرض کنیم این مجموعه، که آن را M می‌نامیم، از عددهایی تشکیل شده است که در $60^\circ < \theta_k \leq 6^\circ$ صدق می‌کنند (برای این کار در صورت لزوم می‌توانیم از دورانی حول مبدأ استفاده کنیم). فرض کنید عددهای مختلط در M ، $z_1, z_2, \dots, z_m$ باشند و مجموع آنها S باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} |S| &= |z_1 + z_2 + \dots + z_m| \geq r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 + \dots + r_m \cos \theta_m \\ &\geq \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + \dots + r_m) \\ &\geq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

راه حل دوم

فرض کنید به‌ازای هر $1 \leq k \leq n$ ، $z_k = x_k + iy_k$. در این صورت

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=1}^n |z_k| \leq \sum_{k=1}^n (|x_k| + |y_k|) \\ &= \sum_{x_k > 0} |x_k| + \sum_{x_k < 0} |x_k| + \sum_{y_k \geq 0} |y_k| + \sum_{y_k < 0} |y_k| \end{aligned}$$

بنابر اصل لانه کبوتری دستکم یکی از جمعوندهای عبارت آخر از $\frac{1}{4}$ کمتر نیست. می‌توانیم فرض کنیم

$$\sum_{x_k < 0} |x_k| \geq \frac{1}{4}$$

چون علامت همه جمله‌ها یکسان است، پس

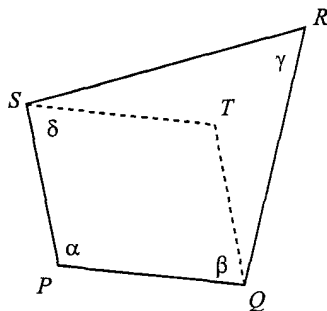
$$\left| \sum_{x_k < 0} z_k \right| \geq \left| \sum_{x_k < 0} x_k \right| = \sum_{x_k < 0} |x_k| \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$$

مسئله ۴. $PQRS$ چهارضلعی محدبی درون مثلث ABC است. ثابت کنید مساحت یکی از مثلثهای PQR ، PQS ، PRS و QRS از یک‌چهارم مساحت مثلث ABC بیشتر نیست.

راه حل اول

ابتدا یادآوری می‌کنیم که مساحت هر متوازی‌الاضلاع درون مثلث، حداکثر نصف مساحت مثلث است (این مطلب را ثابت نمی‌کنیم). فرض کنید اندازه زاویه‌های P ، Q ، R و S به ترتیب α ، β ، γ و δ باشد. چون $360^\circ = (\alpha + \beta) + (\gamma + \delta)$ ، می‌توانیم فرض کنیم $\alpha + \beta \geq 180^\circ$. اگر متوازی‌الاضلاع $PQTS$ را رسم کنیم، T باید درون $PQRS$ ، و بنابراین درون ABC ، قرار گیرد. مساحت مثلث

$PQTS$ دقیقاً نصف مساحت $PQTS$ است، که این هم نصف مساحت مثلث ABC است. پس نتیجه مطلوب به دست آمده است.



شکل ۲

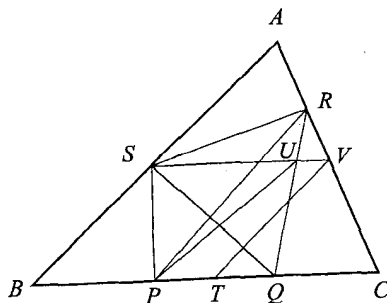
راه حل دوم

می‌توانیم فرض کنیم P و Q روی BC قرار دارند، R روی CA و S روی AB قرار دارد. علاوه بر این، فاصله R تا BC دست کم به اندازه فاصله S تا BC است. از S خطی موازی با BC رسم کنید تا PSV ، PSQ ، اکنون QR را در U و AC را در V قطع کند. متوازی الاضلاع $BSVT$ را رسم کنید. اکنون PSR و PSU سه مثلث اند که در قاعده PS مشترک اند. چون U میان R و Q قرار دارد، فاصله U تا PS از هر دو فاصله‌های Q و R تا PS کمتر نیست. بنابراین

$$\min \{S_{PSQ}, S_{PSR}\} \leq S_{PSU}$$

چون $SU \leq SV$ ، بنابر حکمی که در ابتدای راه حل اول ذکر کردیم،

$$S_{PSU} \leq \frac{1}{4} S_{BSVT} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$$



شکل ۳

$$\min \{S_{PSQ}, S_{PSR}\} \leq \frac{1}{4} S_{ABC}$$

مسأله ۵. آیا جایگشتی از عدهای

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 1986, 1986$$

وجود دارد که به ازای هر k ، دقیقاً k عدد دیگر میان دو k وجود داشته باشد؟

راه حل اول

فرض کنید چنین جایگشتی وجود داشته باشد. ۳۹۷۲ مکان را یکی در میان با سیاه و سفید رنگ کنید. میان دوتا k دقیقاً k مکان قرار دارد. اگر k عددی زوج باشد، رنگ مکانهایی که این دوتا k اشغال کرده اند فرق می کند. چون ۹۹۳ جفت زوج وجود دارد، عدهای زوج تعداد فردی از مکانهای سیاه را اشغال می کنند. اگر k عددی فرد باشد، رنگ مکانهایی که دوتا k اشغال کرده اند یکسان است. بنابراین ۹۹۳ جفت فرد تعداد زوجی از مکانهای سیاه را اشغال می کنند. در نتیجه، تعداد کل مکانهای سیاه رنگ باید عددی فرد باشد. با وجود این، این تعداد ۱۹۸۶ است، و بنابراین به تناقض رسیده ایم.

راه حل دوم

فرض کنید چنین جایگشتی وجود داشته باشد. اگر یکی از عدهای x میان دوتا عدد y قرار گیرد می گوئیم x با y احاطه شده است. ممکن است هر دو x با y ها احاطه شده باشند، هر دو y با x ها احاطه شده باشند، یا یک x با y ها و یک y با x ها احاطه شده باشد. بنابراین از هر دو جفت عدد، دو عدد احاطه شده پدید می آید. در نتیجه، تعداد کل عدهای احاطه شده عددی زوج است. از طرف دیگر ۱ ها ۱ عدد را احاطه می کنند، ۲ ها ۲ عدد را احاطه می کنند، و همین طور تا آخر. بنابراین تعداد کل عدهای احاطه شده برابر با

$$1 + 2 + \dots + 1986$$

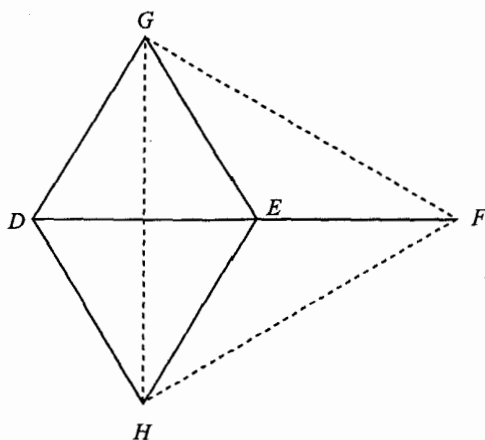
است، که عددی فرد است. به تناقض رسیده ایم.

مسأله ۶. هر نقطه در صفحه را به دلخواه به رنگ سیاه یا سفید می کنیم. ثابت کنید مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع ۱ یا $\sqrt{3}$ وجود دارد که رنگ هر سه رأسش یکسان است.

راه حل

اگر هر دو نقطه به فاصله ۱ به یک رنگ باشند، مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۱ داریم که ویژگی مطلوب را دارد. بنابراین می توانیم فرض کنیم دو نقطه مانند A و B به رنگهای مختلف وجود دارند که $AB = 1$. فرض کنید C نقطه ای باشد که $AC = 2 = BC$. در این صورت رنگ C با

رنگ یکی از A و B فرق دارد. به این ترتیب می‌توانیم فرض کنیم نقطه‌ای سیاه مانند D و نقطه‌ای سفید مانند F وجود دارد که $DF = 2$. فرض کنید E وسط DF باشد. بنابر تقارن می‌توانیم فرض کنیم E سیاه است. مثلثهای متساوی‌الاضلاع DEH و DEG را رسم کنید. اگر یکی از H و G سیاه باشد، مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ داریم که سه رأسش سیاه است. اگر چنین نباشد، FGH مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $\sqrt{3}$ است که سه رأسش سفید است.



شکل ۴

دومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۷

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی باشد. ثابت کنید معادلهٔ

$$z^{n+1} - z^n - 1 = 0$$

ریشه‌ای دارد که در $|z| = 1$ صدق می‌کند، اگر و فقط اگر $n + 2$ بر ۶ بخش پذیر باشد.

راه حل

فرض کنید $|z| = 1$ و $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$. در این صورت $z^n(\omega - 1) = 1$ و در نتیجه $|\omega - 1| = 1$. بنابراین ω یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های $|z| = 1$ و $|z - 1| = 1$ است؛ پس $\omega = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$. علاوه بر این،

$$\omega - 1 = \cos \frac{2\pi}{3} \pm i \sin \frac{2\pi}{3} = \omega^2$$

در نتیجه

$$1 = \omega^n(\omega - 1) = \omega^{n+2} = \cos \frac{(n+2)\pi}{3} \pm i \sin \frac{(n+2)\pi}{3}$$

بنابراین $\frac{(n+2)\pi}{3} = 2k\pi$ و در نتیجه به ازای عددی صحیح مانند k ، $n + 2 = 6k$.

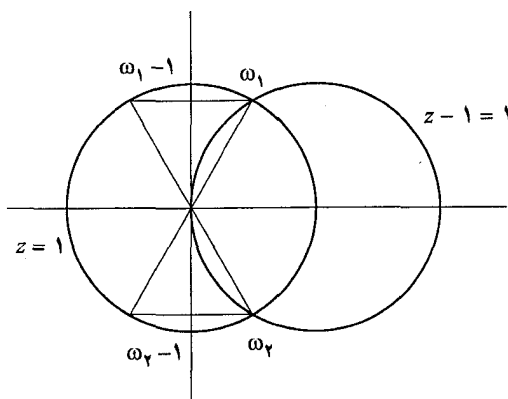
برعکس، فرض کنید به ازای عددی صحیح مانند k ، $n + 2 = 6k$. فرض کنید

$$\omega = \cos \frac{\pi}{3} \pm i \sin \frac{\pi}{3}$$

در این صورت $|\omega| = 1$, $\omega^2 = \omega - 1$ و $\omega^{n+2} = 1$ بنابراین

$$\omega^{n+1} - \omega^n - 1 = \omega^n(\omega - 1) - 1 = \omega^{n+2} - 1 = 0$$

همان چیزی که می‌خواهیم.



شکل ۵

مسئله ۲. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به طول ضلع n با ترسیم خطهایی موازی با ضلعهایش به n^2 مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم شده است. هر نقطه‌ای که رأس دست‌کم یکی از این مثلثهای یکه است با عددی حقیقی برجسب خورده است. رأسهای A , B و C به ترتیب با a , b و c برجسب خورده‌اند. در هر لوزی که از ترکیب دو مثلث یکه که در ضلعی مشترک‌اند تشکیل شده است، مجموع برجسبهای روی مجموعه‌های رأسهای روبه‌رو با هم برابر است.

الف) کوتاهترین فاصله را میان نقطه‌ای که برجسبش بزرگترین عدد است با نقطه‌ای که برجسبش کوچکترین عدد است تعیین کنید.

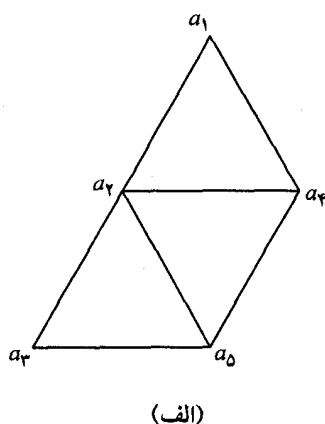
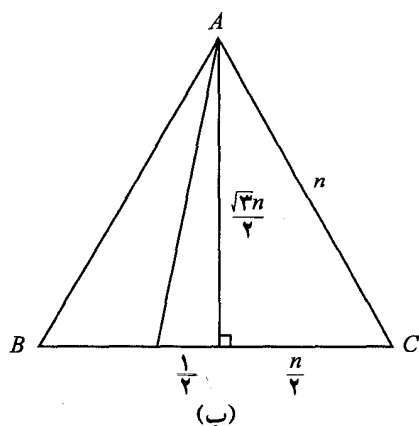
ب) مجموع برجسبها را تعیین کنید.

راه‌حل

سه مثلث کوچک دلخواه در یک سطر در نظر بگیرید و فرض کنید پنج نقطه (رأسها) با a_1, a_2, a_3, a_4 و a_5 مطابق شکل ۶ (الف) برجسب خورده‌اند. چون

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4, \quad a_2 + a_5 = a_3 + a_4$$

پس $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. در نتیجه برجسبهای روی هر خط موازی با ضلعی از مثلث ABC به تصاعد حسابی‌اند و بنابراین برجسبهای اکسترم روی محیط مثلث ABC قرار دارند.



شکل ۶

(الف) فاصله موردنظر را با r نشان دهید. اگر $a = b = c$ ، آن وقت همه برجسبها یکی اند و $r = 0$. اگر a, b و c متمایز باشند، برجسبهای اکسترم روی رأسهای مثلث ABC قرار دارند و $r = n$. فرض کنید $a \neq b = c$. در این صورت برجسبهای اکسترم روی A و BC قرار دارند. از شکل ۶ (ب) معلوم می شود که اگر n عددی زوج باشد، $r = \frac{\sqrt{3}n}{2}$ و اگر n عددی فرد باشد،

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}n}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3n^2 + 1}}{2}$$

(ب) با دوران مثلث ABC به اندازه 120° و 240° دو مثلث برجسب خورده دیگر به دست می آید. مثلثها را روی هم قرار دهید و هر نقطه را با مجموع برجسبهایش در سه مثلث برجسب بزنید. چون قاعده مربوط به لوزیها در هر مثلث درست است، در مثلث مرکب هم درست است. بنابراین همه برجسبها $a + b + c$ هستند. چون

$$1 + 2 + \dots + (n + 1)$$

یا $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ نقطه وجود دارد، مجموع تمام برجسبها در ABC برابر است با

$$\frac{(n+1)(n+2)(a+b+c)}{6}$$

مسئله ۳. در یک دوره مسابقه هر دو بازیکن دقیقاً یک بار با هم بازی می کنند. هیچ یک از بازیها به تساوی نمی انجامد. بازیکنی مانند A به شرطی جایزه می گیرد که به ازای هر بازیکن دیگری مانند B ، یا

A از B برده باشد یا A از بازیکنی مانند C برده باشد که او از B برده است. ثابت کنید که اگر فقط یک بازیکن جایزه برده باشد، این بازیکن از بقیه بازیکنها برده است.

راه حل اول

ادعا می‌کنیم بازیکنی مانند A که بیشترین برد را داشته جایزه‌ای برده است. درحقیقت، اگر بازیکنی مانند B از A برده باشد، دست‌کم یکی از بازیکنهایی که A از آنها برده است باید از B برده باشد، زیرا در غیر این صورت تعداد بردهای B از بردهای A بیشتر می‌شود. پس ادعایمان درست است. فرض کنید A تنها بازیکنی باشد که جایزه‌ای برده است. مجموعه‌های بازیکنهایی را که از A برده‌اند و بازیکنهایی که به A باخت‌اند به ترتیب با S و T نشان می‌دهیم. فرض کنید S ناتهی باشد. در مسابقه دوره‌ای کوچکی که میان بازیکنان S برگزار می‌شود، بازیکنی مانند B وجود دارد که بیشترین تعداد برد را داشته و بنابراین جایزه‌ای برده است. چون B از A و A از هر بازیکنی در T برده است، B هم در مسابقه اصلی جایزه برده است و این با فرض یکتایی ما تناقض دارد. بنابراین S تهی است و A از بقیه بازیکنها برده است.

راه حل دوم

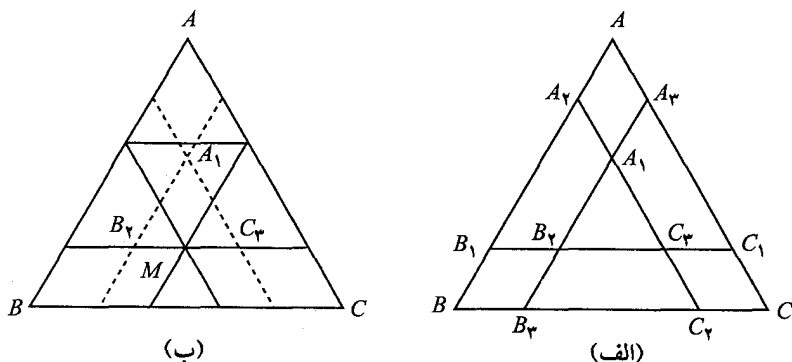
فرض کنید A تنها بازیکنی است که جایزه گرفته است. فرض کنید S مجموعه بازیکنهایی باشد که از A برده‌اند. فرض کنید S ناتهی باشد. اگر B بازیکنی در S باشد، ممکن نیست از همه در S برده باشد، زیرا در غیر این صورت B هم باید برنده جایزه می‌شد. فرض کنید S_1 مجموعه بازیکنهایی در S باشد که از B برده‌اند. در این صورت S_1 ناتهی است. اگر B_1 بازیکنی در S_1 باشد، هم از A برده است و هم از B . بنابراین S_2 مجموعه بازیکنهایی در S_1 که از B_1 برده‌اند، ناتهی است. ممکن نیست این روند خاتمه یابد و تعداد بازیکنها نیز متناهی است. در نتیجه S تهی است و A از بقیه بازیکنها برده است.

مسأله ۴. ۵ نقطه درون مثلثی متساوی‌الاضلاع به مساحت ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید سه مثلث متساوی‌الاضلاع وجود دارند که با مثلث مفروض متشابه‌اند، هریک از این ۵ نقطه درون دست‌کم یکی از این سه مثلث قرار دارد و مجموع مساحت‌های آنها حداکثر $\frac{1}{64}$ است.

راه حل

مثلث ABC را مطابق شکل ۷ (الف) به هفت ناحیه تقسیم کنید. سه خطی که رسم کرده‌ایم با ضلعهای مثلث ABC موازی‌اند و به فاصله‌ای اندکی بیشتر از $\frac{1}{8}$ طول ارتفاع مثلث ABC از ضلعها قرار دارند. فرض کنید یکی از مثلثهای AB_1C_1 ، A_2BC_2 و $A_3B_3C_3$ شامل دست‌کم سه تا از پنج نقطه باشد. باید حداکثر دو مثلث با مساحتی ناچیز اضافه کنیم تا باقی‌مانده نقطه‌ها هم پوشانده شوند.

مساحت کل کمتر از $۰/۶۴$ است. از حالا به بعد فرض می‌کنیم آنچه گفتیم درست نباشد. فرض کنید $AA_2A_1A_3$ شامل هیچ یک از این ۵ نقطه نباشد. بنابراین اصل لانه کبوتری یا A_2BC_2 یا A_3B_3C دست کم شامل سه تا از نقطه‌هاست.



شکل ۷

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم هر یک از ناحیه‌های گوشه‌ای دست کم شامل یکی از نقطه‌هاست. از استدلالی مشابه آنچه گفتیم معلوم می‌شود که ناحیه مرکزی باید تهی باشد، و سه ناحیه کناری شامل حداکثر یکی از نقطه‌ها باشند. اگر هر ۵ نقطه در ناحیه‌های گوشه‌ای باشند، می‌توانیم از A_1 و B_1 و C_1 خط‌هایی به ترتیب موازی با BC ، CA ، AB رسم کنیم. این خط‌ها سه مثلث گوشه‌ای جدا می‌کنند که شامل ۵ نقطه هستند و مساحت کلشان اندکی بیش از $۰/۴۸$ است. فرض کنید ناحیه کناری پایینی شامل ۱ نقطه باشد. در این صورت ناحیه گوشه‌ای بالا باید شامل ۲ نقطه باشد. فرض کنید M وسط B_2C_2 باشد. مطابق شکل ۷ (ب) از A_1 و M به ترتیب خط‌هایی موازی با BC ، CA ، AB رسم کنید. مثلث بالایی ۲ نقطه ناحیه گوشه‌ای بالایی را می‌پوشاند. یکی از دو مثلث پایینی نقطه‌های واقع در ناحیه کناری پایینی و نیز ناحیه گوشه‌ای پایینی را می‌پوشاند. مثلث سوم با مساحتی ناچیز بقیه نقطه‌ها را می‌پوشاند. مساحت کل این سه مثلث اندکی بیش از $۰/۵۲$ است.

مسأله ۵. کره‌ای به مرکز O بر هر یک از شش یال چهاروجهی مماس است. علاوه بر این، چهار کره به مرکزهای رأسهای چهاروجهی وجود دارند که هر یک از آنها بر یکی دیگر مماس است و همگی بر کره‌ای دیگر به مرکز O مماس‌اند. ثابت کنید این چهاروجهی منتظم است.

راه حل

چهاروجهی را $A_1A_2A_3A_4$ ، کره‌ای را که بر هر شش یال این چهاروجهی مماس است T ، کره دیگر را

S و کره‌هایی به مرکزهای A_1, A_2, A_3 و A_4 را به ترتیب S_1, S_2, S_3 و S_4 بنامید. فرض کنید B_1 , B_2 و B_3 به ترتیب نقطه تماس S_2 و S_3, S_3 و S_1 و S_1 و S_2 باشند. فرض کنید C_1, C_2 و C_3 به ترتیب نقطه‌های تماس T با A_2A_3 و A_3A_1 و A_1A_2 باشند. در این صورت

$$A_1B_2 = A_1B_3, \quad A_2B_3 = A_2B_1, \quad A_3B_1 = A_3B_2$$

$$A_1C_2 = A_1C_3, \quad A_2C_3 = A_2C_1, \quad A_3C_1 = A_3C_2$$

در نتیجه B_1 بر C_1 منطبق است، B_2 بر C_2 منطبق است و B_3 بر C_3 منطبق است. فرض کنید S_1 درون S و S_2 بیرون S باشد. در این صورت S_1 و S_2 باید بر هم مماس باشند و در ضمن در نقطه تماسشان بر S و در نتیجه، در همین نقطه بر S_3 و S_4 مماس باشند. چنین چیزی هم ممکن نیست، زیرا A_1, A_2, A_3 و A_4 روی یک خط قرار ندارند. فرض کنید r, r_1, r_2, r_3 و r_4 به ترتیب شعاعهای T, S, S_1, S_2, S_3 و S_4 باشند. اگر S بیرون S_1 باشد، بیرون S_2, S_3 و S_4 نیز هست. به این ترتیب

$$OB_1^2 + A_1B_3^2 = OA_1^2$$

یا

$$R^2 + r_1^2 = (r + r_1)^2$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$R^2 + r_2^2 = (r + r_2)^2$$

بنابراین

$$A_1A_2 = r_1 + r_2 = \frac{R^2 - r^2}{2r} + \frac{R^2 - r^2}{2r} = \frac{R^2 - r^2}{r}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$A_iA_j = \frac{R^2 - r^2}{r}, \quad 1 \leq i < j \leq 4$$

پس $A_1A_2A_3A_4$ چهاروجهی منتظم است. اگر S, S_1 را دربر داشته باشد، S_2, S_3 و S_4 را نیز دربر دارد. در این صورت

$$R^2 + r_i^2 = (r - r_i)^2, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

پس $A_1A_2A_3A_4$ چهاروجهی منتظم به طول ضلع $\frac{r^2 - R^2}{r}$ است.

مسأله ۶. مجموع m عدد طبیعی زوج و n عدد طبیعی فرد ۱۹۸۷ است. بیشترین مقدار $3m + 4n$ چقدر است؟

راه حل

معلوم است که

$$1987 \geq (2 + 4 + \dots + 2m) + (1 + 3 + \dots + (2n - 1))$$

$$= \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 - \frac{1}{4}$$

و در نتیجه

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 \leq 1987 + \frac{1}{4}$$

به این ترتیب، بنابر نابرابری کُشی-شوارتز،

$$3m + 4n = 3\left(m + \frac{1}{2}\right) + 4n - \frac{3}{2}$$

$$\leq \sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2 - \frac{3}{4}}$$

$$\leq 5\sqrt{1987 + \frac{1}{4}} - \frac{3}{2} < 222$$

بنابراین $3m + 4n \leq 221$. معادله دیوفانتی $3m + 4n = 221$ در مجموعه عددهای طبیعی جوابهایی دارد، اما در هیچ یک از آنها اختلاف m و n چندان زیاد نیست. 221 را بر $3 + 4$ تقسیم کنید، خارج قسمت 31 و باقیمانده 4 است. پس اگر $m = 31$ و $n = 32$ ، (m, n) جوابی برای معادله دیوفانتی $3m + 4n = 221$ است. اما

$$1 + 2 + \dots + 63 = 2016$$

و 2016 ، 29 تا از 1987 بیشتر است. برای اینکه این مجموع را کمتر کنیم، چهار عدد زوج را با سه عدد فرد عوض می‌کنیم. توجه کنید که

$$(54 + 56 + 58 + 62) - (65 + 67 + 69) = 29$$

پس اگر 29 عدد زوج $2, 4, \dots, 52, 54$ و 60 و 35 عدد فرد $1, 3, \dots, 69$ را در نظر بگیریم، مجموعه‌شان دقیقاً 1987 است. بنابراین، بیشترین مقدار $3m + 4n$ برابر با 221 است.

سومین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۸

مسأله ۱. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_n$ عددهایی حقیقی باشند و دستکم یکی از آنها غیرصفر باشد. عددهای حقیقی $r_1, r_2, \dots, r_n$ چنانند که به ازای هر دنباله از عددهای حقیقی مانند $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \dots + r_n(x_n - a_n)$$

از

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. $r_1, r_2, \dots, r_n$ را پیدا کنید.

راه حل اول

فرض کنید $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. در این صورت

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \leq \sum_{i=1}^n r_i a_i$$

فرض کنید $1 \leq i \leq n, x_i = 2a_i$. در این صورت

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \geq \sum_{i=1}^n r_i a_i$$

در نتیجه

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = \sum_{i=1}^n r_i a_i \quad (۱)$$

بنابر نابرابری کوشی-شوارتز،

$$\sum_{i=1}^n r_i a_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n r_i^2 \right) \quad (۲)$$

و در نتیجه، چون $\sum_{i=1}^n a_i^2 \neq 0$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \geq 1$$

فرض کنید $1 \leq i \leq n$ ، $x_i = r_i$ در این صورت

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 - \sum_{i=1}^n r_i a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$$

بنابراین، از تساوی (۱) نتیجه می شود

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} \leq 1$$

پس

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} = 1$$

یعنی در نابرابری (۲) تساوی برقرار است و در نتیجه، عددی ثابت مانند λ وجود دارد که $r_i = \lambda a_i$ ، $1 \leq i \leq n$ به این ترتیب، از تساوی (۱) نتیجه می شود

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

بنابراین

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}, \quad 1 \leq i \leq n$$

راه حل دوم

x_1 را بزرگتر از a_1 انتخاب کنید و فرض کنید $x_i = a_i$ ، $2 \leq i \leq n$. در این صورت

$$\begin{aligned} r_1(x_1 - a_1) &\leq \sqrt{x_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \\ &= \frac{x_1^2 - a_1^2}{\sqrt{x_1^2 + \sum_{i=2}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \end{aligned}$$

اگر از دو طرف نابرابری بالا $x_1 - a_1$ را حذف و فرض کنیم x_1 به a_1 میل کند، نتیجه می‌گیریم

$$r_1 \leq \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

اگر x_1 را کوچکتر از a_1 انتخاب کنیم و روند قبلی را تکرار کنیم، نتیجه می‌گیریم

$$r_1 \geq \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

بنابراین

$$r_1 = \frac{a_1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}, \quad 2 \leq i \leq n$$

مسأله ۲. دو دایره هم‌مرکز مفروض‌اند و شعاع یکی از آنها دو برابر شعاع دیگری است. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایره کوچکتر محاط شده است. امتدادهای AB ، BC ، CD و DA دایره بزرگتر را به ترتیب در نقطه‌های C_1 ، D_1 و A_1 و B_1 قطع کرده‌اند. ثابت کنید محیط $A_1B_1C_1D_1$ از دو برابر محیط $ABCD$ کمتر نیست و تعیین کنید که چه وقت این محیطها برابرند.

راه حل

می‌توانیم فرض کنیم شعاع دایره کوچکتر برابر با ۱ است. فرض کنید O مرکز دایره‌ها باشد. با استفاده از قضیه بطلمیوس در چهارضلعیهای OAB_1C_1 ، OBC_1D_1 ، OCD_1A_1 ، ODA_1B_1 ، به دست

$$2AC_1 \leq B_1C_1 + 2AB_1$$

$$2BD_1 \leq C_1D_1 + 2BC_1$$

$$2CA_1 \leq D_1A_1 + 2CD_1$$

$$2DB_1 \leq A_1B_1 + 2DA_1$$

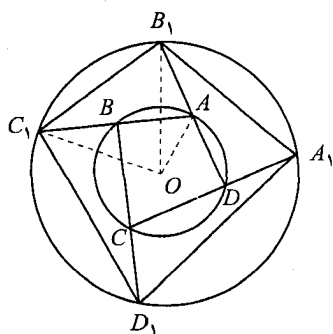
اگر این نابرابریها را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم

$$2(AB + BC + CD + DA) \leq A_1B_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A_1$$

برای اینکه در این نابرابری تساوی برقرار باشد، هر یک از چهارضلعیهای OAB_1C_1 ، OBC_1D_1 ، ODA_1B_1 و OCD_1A_1 باید محاطی باشد. در این صورت

$$\angle OAC_1 = \angle OB_1C_1 = \angle OC_1B_1 = \angle OAD$$

و در نتیجه OA نیمساز زاویه BAD است. به همین ترتیب معلوم می‌شود که OB ، OC و OD به ترتیب نیمساز زاویه‌های ABC ، BCD و CDA هستند. یعنی چهارضلعی $ABCD$ محیطی و O مرکز دایره محاطی آن است. چنین چیزی فقط وقتی ممکن است که $ABCD$ مربع باشد. برعکس، اگر $ABCD$ مربع باشد، $A_1B_1C_1D_1$ هم مربع است و معلوم است که محیط $A_1B_1C_1D_1$ دو برابر محیط $ABCD$ است.



شکل ۸

مسأله ۳. دنباله‌ای از n عدد حقیقی مفروض است. هر قطعه از جمله‌های متوالی را که میانگینشان از ۱۹۸۸ بیشتر است اژدها، و اولین جمله در این قطعه را سر اژدها می‌نامیم. هر تک جمله‌ای که از ۱۹۸۸ بیشتر است نیز اژدها و سر اژدهاست. فرض کنید دست کم یک اژدها وجود داشته باشد. ثابت کنید میانگین

همه جمله‌هایی که سر اژدها هستند از ۱۹۸۸ بیشتر است.

راه حل اول

فرض کنید دنباله مفروض

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

باشد. فرض کنید a_k سر دست‌کم یک اژدها باشد و از میان اژدهاهای ممکن، اژدهایی را انتخاب کنید که طولش کمترین مقدار ممکن باشد. فرض کنید این اژدها

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}$$

باشد. ثابت می‌کنیم هر جمله از این اژدها سر اژدهایی دیگر است. فرض کنید $1 \leq j \leq l$, a_{k+j} سر هیچ اژدهایی نباشد. در این صورت میانگین a_{k+j} , a_{k+j+1} , $\dots$, a_{k+l} حداکثر برابر با ۱۹۸۸ است. بنابراین،

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+j-1}$$

اژدهایی است که طولش از طول اژدهای

$$a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l}$$

کمتر است. پس به تناقض رسیده‌ایم و آنچه گفتیم درست است. از دنباله مفروض، اولین جمله‌ای را که سر اژدهاست انتخاب کنید و کوتاهترین اژدهایی را که این جمله سر آن است حذف کنید. این کار را آنقدر ادامه دهید تا به انتهای دنباله برسید. معلوم است که هیچ‌یک از جمله‌های باقی‌مانده سر هیچ اژدهایی نیست. بنابر آنچه ثابت کردیم، هر جمله حذف‌شده سر دست‌کم یک اژدهاست. چون در هر مرحله یک اژدها را حذف کرده‌ایم و میانگین جمله‌های هر اژدها از ۱۹۸۸ بیشتر است، میانگین همه جمله‌های حذف‌شده هم از ۱۹۸۸ بیشتر است.

راه حل دوم

از دنباله مفروض، نخستین جمله‌ای را که سر اژدهاست انتخاب کنید. هر اژدهایی را که این جمله سر آن است حذف کنید. این کار را ادامه دهید تا به انتهای دنباله برسید. معلوم است که هیچ‌یک از جمله‌های باقی‌مانده سر هیچ اژدهایی نیست. چون در هر مرحله یک اژدها را حذف کرده‌ایم، میانگین جمله‌های حذف‌شده از ۱۹۸۸ بیشتر است. در میان این جمله‌ها، هر کدام که سر هیچ اژدهایی نیست از ۱۹۸۸ کمتری یا آن برابر است، زیرا در غیر این صورت اژدهایی به طول ۱ است. وقتی همه این جمله‌ها حذف شوند، میانگین جمله‌های باقی‌مانده باز هم از ۱۹۸۸ بیشتر است.

راه حل سوم

حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$ ، معلوم است که حکم درست است. فرض کنید

حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد و دنباله‌ای با $n + 1$ جمله در نظر بگیرید. اگر هر جمله این دنباله سر اژدهایی باشد، می‌توانیم دنباله را به تعدادی اژدهای مجزا تقسیم کنیم و در نتیجه میانگین همهٔ جمله‌ها از ۱۹۸۸ بیشتر است. در غیر این صورت، فرض کنید x اولین جمله‌ای باشد که سر هیچ اژدهایی نیست. در این صورت $x \leq 1988$ و اگر x را حذف کنیم، باز هم هر جمله قبل از x اژدهاست. اکنون دنباله‌ای n جمله‌ای داریم که حکم مسأله برای آن، و در نتیجه برای دنباله $n + 1$ جمله‌ای، درست است.

مسألهٔ ۴. الف) فرض کنید a_1, a_2 و a_3 عددهایی حقیقی و مثبت باشند که در نابرابری

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$$

صدق می‌کنند. ثابت کنید a_1, a_2 و a_3 طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

ب) فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگتر از ۳ باشد. فرض کنید به‌ازای عددهایی حقیقی و مثبت مانند $a_1, a_2, \dots, a_n$ نابرابری

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

درست باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر i ، هر j و هر k ، a_i, a_j و a_k طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

راه‌حل اول

الف) نابرابری موردنظر با

$$\begin{aligned} & \circ < 2(a_1^2 a_2^2 + a_2^2 a_3^2 + a_3^2 a_1^2) - (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4) \\ & = (a_1 + a_2 + a_3)(a_2 + a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2)(a_1 + a_2 - a_3) \end{aligned}$$

هم‌ارز است. می‌توانیم فرض کنیم $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. به این ترتیب سه پراتر اول سمت راست نابرابری بالا مثبت‌اند و در نتیجه، پراتر آخر هم مثبت است. بنابراین a_1, a_2 و a_3 طول سه ضلع یک مثلث‌اند.

ب) حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. به‌ازای $n = 3$ ، حکم را در قسمت (الف) ثابت کرده‌ایم. فرض کنید $n \geq 3$ و حکم را به‌ازای n ثابت کرده باشیم. به‌ازای $n + 1$ عدد حقیقی مانند $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ ، نابرابری مفروض با نابرابریهای زیر هم‌ارز است

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 + 2a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + a_{n+1}^4 > n \sum_{i=1}^n a_i^4 + na_{n+1}^4 \\ & (n-1)a_{n+1}^4 - 2a_{n+1}^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + n \sum_{i=1}^n a_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 < \circ \end{aligned}$$

عبارت سمت چپ نابرابری آخر را به عنوان چندجمله‌ای درجه دوم بر حسب a_{n+1}^2 در نظر بگیرید. چون ضریب پیشرو این چندجمله‌ای مثبت است و چندجمله‌ای مقادیرهای منفی هم دارد، ریشه‌های این چندجمله‌ای حقیقی‌اند. پس مبین آن باید مثبت باشد. در نتیجه

$$4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 - 4(n-1) \left(n \sum_{i=1}^n a_i^4 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \right) > 0$$

یا

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 > (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^4$$

در نتیجه، چون حکم به ازای n درست است، به ازای هر i ، هر j و هر k که $1 \leq i < j < k \leq n$ ، a_i و a_j و a_k طول سه ضلع یک مثلث‌اند. بنابر تقارن، اگر $1 \leq i < j < k \leq n+1$ باز هم این نتیجه درست است. یعنی حکم به ازای $n+1$ هم درست است.

راه حل دوم

(الف) از همان روش راه حل اول استفاده کنید.

(ب) چون $n > 3$ ، از نابرابری کُشی-شوارتز نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} (n-1) \sum_{i=1}^n a_i^4 &< \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + a_4^2 + \dots + a_n^2 \right)^2 \\ &\leq (n-1) \left(\frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2}{4} + a_4^4 + \dots + a_n^4 \right) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 > 2(a_1^4 + a_2^4 + a_3^4)$$

پس بنابر قسمت (الف)، a_1 ، a_2 و a_3 طول سه ضلع یک مثلث‌اند. بنابر تقارن، اگر $1 \leq i < j < k \leq n$ ، a_i و a_j و a_k هم طول سه ضلع مثلث‌اند.

مسأله ۵. سه چهاروجهی $A_i B_i C_i D_i$, $1 \leq i \leq 3$ ، مفروض اند. از نقطه‌های B_i , C_i و D_i سه صفحه β_i , γ_i و δ_i به ترتیب بر $A_i B_i$, $A_i C_i$ و $A_i D_i$ عمود شده‌اند. اگر این سه صفحه در یک نقطه متقاطع باشند و A_1 , A_2 و A_3 روی یک خط قرار داشته باشند، اشتراک کره‌های محیطی این سه چهاروجهی را تعیین کنید.

راه حل

فرض کنید نه صفحه موردنظر یکدیگر را در نقطه E قطع کنند. در این صورت

$$\angle E B_i A_i = \angle E C_i A_i = \angle E D_i A_i = 90^\circ$$

چون A_i , B_i , C_i و D_i روی یک صفحه قرار ندارند، B_i , C_i و O_i همگی روی کره‌ای به قطر $E A_i$ قرار دارند. این کره، کره محیطی چهاروجهی $A_i B_i C_i D_i$ است و مرکز آن، که آن را O_i می‌نامیم، وسط $E A_i$ است. اگر A_1 , A_2 و A_3 بر هم منطبق باشند، سه کره محیطی چهاروجهیها هم بر هم منطبق اند و اشتراکشان هر یک از آنهاست. فرض کنید A_1 , A_2 و A_3 بر هم منطبق نباشند. در این صورت، چون این سه نقطه روی یک خط قرار دارند، نقطه‌های O_1 , O_2 و O_3 هم روی یک خط قرار دارند. معلوم است که سه کره محیطی چهاروجهیها نسبت به $O_1 O_3$ متقارن اند و از E می‌گذرند. اگر E روی $O_1 O_3$ قرار داشته باشد، اشتراک موردنظر نقطه E است، که همان نقطه تماس مشترک آنهاست، و در غیر این صورت، این اشتراک دایره‌ای است که از دوران E حول $O_1 O_3$ به دست می‌آید.

مسأله ۶. به ازای هر عدد طبیعی مانند n , $n \geq 3$ ، فرض کنید $f(n)$ کوچکترین عدد طبیعی باشد که مقسوم علیه n نیست. فرض کنید $f^{(1)}(n) = f(n)$. اگر $f^{(k)}(n) \geq 3$ ، $f(f^{(k)}(n))$ را $f^{(k+1)}(n)$ تعریف می‌کنیم. به ازای هر عدد طبیعی مانند n , $n \geq 3$ ، k را طوری تعیین کنید که $f^{(k)}(n) = 2$.

راه حل

معلوم است که اگر n فرد باشد، $f(n) = 2$ و در نتیجه $k = 1$. فرض کنید n عددی زوج باشد و $n \geq 4$. اگر $f(n) = ab$ ، که در آن a و b عددهایی طبیعی و بزرگتر از ۱ و نسبت به هم اول اند،

$$a < f(n), \quad b < f(n)$$

بنابراین a و b هر دو مقسوم علیه n هستند. در نتیجه، چون a و b نسبت به هم اول اند، ab هم مقسوم علیه n است و این هم با تعریف $f(n)$ تناقض دارد. پس به ازای عددی اول مانند p و عددی طبیعی مانند l ، $f(n) = p^l$. اگر $p = 2$ ، آن وقت $f(2^l) = 3$ و $f(3) = 2$ و در نتیجه $k = 3$. اگر $p \neq 2$ ، آن وقت $f(p^l) = 2$ و در نتیجه $k = 2$.

چهارمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۸۹

مسأله ۱. هر یک از A و B اجتماع کمانهایی دوه‌دو مجزا روی دایره واحد است. علاوه بر این، طول هر کمان در B برابر با $\frac{\pi}{m}$ است، که در اینجا m عددی طبیعی و ثابت است. مجموعه‌ای را که از دوران A در جهت پادساعتگرد حول مرکز دایره به اندازه $j\frac{\pi}{m}$ رادیان به دست می‌آید با A^j نشان می‌دهیم. ثابت کنید عددی طبیعی مانند k وجود دارد که

$$l(A^k \cap B) \geq \frac{l(A)l(B)}{2\pi}$$

که در آن $l(X)$ برابر با مجموع طول کمانهای مجزای مجموعه X است.

راه حل

فرض کنید کمانهای $B, b_1, b_2, \dots, b_n$ باشند. کمانی را که از دوران b_i حول مرکز به اندازه $j\frac{\pi}{m}$ رادیان در جهت ساعتگرد به دست می‌آید با b_i^{-j} نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m l(A^j \cap B) &= \sum_{j=1}^m l\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n b_i^{-j}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n l\left(A \cap b_i^{-j}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2m} l(A \cap b_i^{-j}) \\
 &= \sum_{i=1}^n l\left(A \cap \left(\bigcup_{j=1}^{2m} b_i^{-j}\right)\right) \\
 &= nl(A)
 \end{aligned}$$

در تساوی آخر از این مطلب استفاده کرده‌ایم که b_i کمانی به طول $\frac{\pi}{m}$ است، و در نتیجه $\bigcup_{j=1}^{2m} b_i^{-j}$ دایره واحد است. در نتیجه بنابر اصل لانه کیوتری، به ازای عددی مانند k ، $1 \leq k \leq 2j$ ،

$$l(A^k \cap B) \geq \frac{nl(A)}{2m} = \frac{1}{2\pi} \frac{n\pi}{m} l(A) = \frac{l(A)l(B)}{2\pi}$$

مسأله ۲. فرض کنید

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددهایی حقیقی و مثبت‌اند. ثابت کنید

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1-x_2}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n-1}}$$

راه حل اول

می‌توانیم فرض کنیم $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ و در نتیجه

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \leq \dots \leq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

به این ترتیب، از نابرابری چیشف و نابرابری میانگینهای تواندار به دست می‌آید

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} &\geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \right) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \right)^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1-x_i) \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}
 \end{aligned}$$

بنابر نابرابری کُشی-شوارتز،

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} = \sqrt{n}$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

راه حل دوم

بنابر نابرابری کُشی-شوارتز،

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i}}$$

و

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (1-x_i)} = \sqrt{n(n-1)}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} - \sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i} \\ &\geq \frac{n^2}{\sqrt{n(n-1)}} - \sqrt{n(n-1)} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$

بنابر نابرابری کُشی-شوارتز،

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i} = \sqrt{n}$$

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}$$

مسأله ۳. فرض کنید S دایره واحد در صفحه مختلط باشد. فرض کنید $f: S \rightarrow S$ با $f(x) = x^m$

تعریف شده باشد، که در آن m عددی طبیعی است. فرض کنید

$$f^{(0)}(z) = z, \quad f^{(k+1)}(z) = f\left(f^{(k)}(z)\right), \quad k \geq 0$$

کوچکترین عدد طبیعی مانند n را که $f^{(n)}(z) = z$ ، دوره تناوب z می‌نامیم. تعداد همه نقطه‌های S را که دوره تناوب آنها ۱۹۸۹ است حساب کنید.

راه حل

زیرمجموعه‌ای از S شامل عددهایی مختلط مانند z را که $f^{(n)}(z) = z$ می‌نامیم. در این صورت $1 = z^{m^n - 1}$ و در نتیجه $|E_n| = m^n - 1$. فرض کنید s و t عددهایی طبیعی باشند. اگر t مقسوم علیه s باشد، آن وقت $(s, t) = t$. همچنین، $E_t \subseteq E_s$ و در نتیجه

$$E_{(s,t)} = E_t = E_s \cap E_t$$

در غیر این صورت، می‌توان نوشت $s = qt + r$ ، که در آن $0 < r < t$. فرض کنید $z \in E_s \cap E_t$ در این صورت

$$z = f^{(s)}(z) = f^{(r)}\left(f^{(qt)}(z)\right) = f^{(r)}(z)$$

و در نتیجه $z \in E_t \cap E_s$ بنابراین

$$E_s \cap E_t \subseteq E_t \cap E_r$$

از الگوریتم اقلیدسی نتیجه می‌شود که $E_s \cap E_t \subseteq E_{(s,t)}$. از طرف دیگر، چون (s, t) هم مقسوم علیه s است و هم مقسوم علیه t ، $E_{(s,t)} \subseteq E_s \cap E_t$ ، بنابراین

$$E_{(s,t)} = E_s \cap E_t$$

فرض کنید $z \in E_n$ و دوره تناوب z برابر با k باشد. ثابت می‌کنیم k مقسوم علیه n است. اگر چنین نباشد، می‌توان نوشت $n = qk + r$ ، که در آن $0 < r < k$. چون

$$z = f^{(n)}(z) = f^{(r)}\left(f^{(qk)}(z)\right) = f^{(r)}(z)$$

پس دوره تناوب z حداکثر برابر با r است و این هم تناقض است. یعنی k مقسوم علیه n است. اکنون توجه کنید که $1989 = 3^2 \times 13 \times 17$. نقطه‌هایی که دوره تناوبشان برابر با ۱۹۸۹ است، نقطه‌هایی هستند که در E_{1989} هستند، اما در هیچ یک از مجموعه‌های $E_{\frac{1989}{3}}$ ، $E_{\frac{1989}{13}}$ و $E_{\frac{1989}{17}}$ نیستند. بنابر اصل شمول و عدم شمول، تعداد این اعضا برابر است با

$$m^{1989} - m^{663} - m^{153} - m^{117} + m^{51} + m^{39} + m^9 - m^3$$

مسأله ۴. شعاع دایره محاطی مثلث ABC برابر با r است. نقطه‌های D ، E و F به ترتیب روی ضلعهای BC ، CA و AB قرار دارند. اگر شعاع دایره‌های محاطی مثلثهای AEF ، BFD و CDE برابر باشد، ثابت کنید این شعاع برابر با $r - r'$ است، که در اینجا r' شعاع دایره محاطی مثلث DEF است.

راه حل

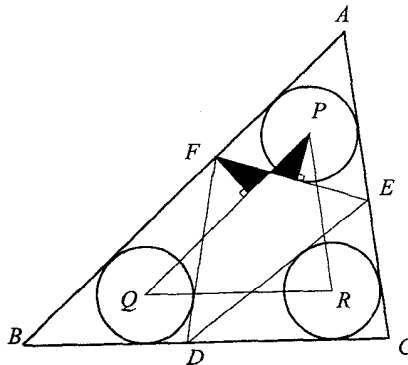
فرض کنید P ، Q و R به ترتیب مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای AEF ، BFD و CDE باشند و x شعاع این دایره‌ها باشد. در این صورت، PQ ، QR و RP به ترتیب با AB ، BC و CA موازی‌اند. بنابراین مثلثهای قائم‌الزاویه سایه‌دار در شکل ۹ هم‌نهشت‌اند. پس محیط مثلث DEF با محیط مثلث PQR برابر است. محیط این دو مثلث را l' و محیط مثلث ABC را l بنامید. چون مثلثهای ABC و PQR مجانس یکدیگرند (مرکز دایره محاطی آنها یکی است و همین نقطه مرکز تجانس آنهاست)، پس $rl' = (r - x)l$. مجموع محیطهای مثلثهای AEF ، BFD و CDE برابر با $l + l'$ است. چون مساحت مثلث ABC برابر با مجموع مساحت‌های مثلثهای AEF ، BFD و CDE است، پس

$$rl = r'l' + x(l + l')$$

و در نتیجه

$$(x + r')l' = (r - x)l = rl'$$

بنابراین $x = r - r'$.



شکل ۹

مسأله ۵. ۱۹۸۹ نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه تایی از آنها روی یک خط قرار ندارند. چگونه باید این نقطه‌ها را به 30° گروه به اندازه‌های مختلف افراز کرد تا تعداد کل مثلثهایی که رأسهایشان در گروه‌های مختلف‌اند بیشترین مقدار ممکن باشد؟

راه حل

فرض کنید گروههای $G_1, G_2, \dots, G_{30}$ و ویژگی موردنظر را داشته باشند و تعداد عضوهایشان به ترتیب برابر با $n_1, n_2, \dots, n_{30}$ باشد و

$$n_1 < n_2 < \dots < n_{30}.$$

ثابت می‌کنیم هر یک از تقاضاهای

$$n_{i+1} - n_i, \quad 1 \leq i \leq 29$$

حداکثر برابر با ۲ است. فرض کنید به ازای عددی مانند k ,

$$n_{k+1} - n_k \geq 3$$

نقطه‌ای مانند x را از G_{k+1} به G_k منتقل کنید و مجموعه‌های جدید را به ترتیب G_{k+1}' و G_k' بنامید. در این صورت، باز هم

$$n_{k-1} < n_k + 1 < n_{k+1} - 1 < n_{k+2}$$

مثلهایی که حذف می‌شوند، مثلهایی هستند که یک رأسشان x است، یک رأسشان در G_k است و رأس دیگرشان در هیچ یک از G_k و G_{k+1} نیست. مثلهایی که به وجود می‌آیند، مثلهایی هستند که یک رأسشان x است، یک رأسشان در G_{k+1} است و رأس دیگرشان در هیچ یک از G_k و G_{k+1} نیست. چون $n_{k+1} - 1 > n_k$ ، پس به تناقض رسیده‌ایم. اکنون ثابت می‌کنیم حداکثر یکی از تقاضاهای

$$n_{i+1} - n_i, \quad 1 \leq i \leq 29$$

ممکن است برابر با ۲ باشد. فرض کنید به ازای عددهایی مانند j و k ,

$$n_{j+1} - n_j = n_{k+1} - n_k = 2$$

می‌توانیم فرض کنیم $k \leq j+1$. یکی از نقطه‌های G_{k+1} را به G_k منتقل کنید. در این صورت باز هم

$$n_{j-1} < n_j + 1 < n_{j+1} \leq n_k < n_{k+1} - 1 < n_{k+2}$$

چون $n_j > n_{k+1} - 1$ ، می‌توانیم مانند قبل ثابت کنیم که تعداد مثلهای زیادتر شده است. توجه کنید که

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{30} = 1989$$

اگر عددی

$$n_1, n_2, \dots, n_{30}$$

تصادفی حسابی با قدرنسبت ۱ تشکیل دهند، آن وقت

$$1989 = 30n_1 + 235$$

اما $۱۵۵۴ - ۴۳۵ = ۱۹۸۹$ و اگر ۱۵۵۴ را بر ۳۰ تقسیم کنیم، خارج قسمت برابر با ۵۱ و باقیمانده برابر با ۲۴ می‌شود. در نتیجه، به‌ازای $۶ = ۳۰ - ۲۴ = k$ ، $n_k + 1 - n_k = ۲$ پس نقطه‌ها را باید به گروه‌هایی با اندازه‌های ۵۱ ، ۵۲ ، $\dots$ ، ۵۶ ، ۵۸ ، ۵۹ ، $\dots$ و ۸۱ تقسیم کنیم تا ویژگی موردنظر را داشته باشند.

مسأله ۶. فرض کنید S مجموعه همه عددهای حقیقی بزرگتر از ۱ باشد. همه تابعها مانند $f: S \rightarrow S$ را پیدا کنید، به‌طوری که به‌ازای همه عددهای حقیقی مانند x ، y ، m و n که $x, y > ۱$ و $m, n > ۰$

$$f(x^m y^n) \leq f(x)^{\frac{1}{m}} f(y)^{\frac{1}{n}}$$

راه حل

فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. فرض کنید

$$m = \frac{1}{2}, \quad n = \frac{\ln x}{2 \ln y}$$

در این صورت

$$f\left(x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{\ln x}{2 \ln y}}\right) \leq f(x)^{\frac{1}{2}} f(y)^{\frac{\ln x}{2 \ln y}}$$

و در نتیجه

$$f(x)^{\ln x} \leq f(y)^{\ln y}$$

به همین ترتیب می‌توان نتیجه گرفت

$$f(x)^{\ln x} \geq f(y)^{\ln y}$$

بنابراین عددی ثابت مانند c وجود دارد که $c > ۱$ و $f(x)^{\ln x} = c$ و در نتیجه $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$.

اگر $c > ۱$ ، $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$ آنگاه

$$\begin{aligned} f(x^m y^n) &= c^{\frac{1}{\ln x^m y^n}} = c^{\frac{1}{m \ln x + n \ln y}} \\ &\leq c^{\frac{1}{m \ln x} + \frac{1}{n \ln y}} = f(x)^{\frac{1}{m}} f(y)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

زیرا بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین توافقی،

$$\frac{\frac{1}{m \ln x} + \frac{1}{n \ln y}}{2} \geq \frac{2}{m \ln x + n \ln y}$$

پنجمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۰

مسأله ۱. $ABCD$ چهارضلعی محدب است و AB با CD موازی نیست. دایره‌ای از A و B می‌گذرد و بر CD در نقطه P مماس است و دایره‌ای هم از C و D می‌گذرد و بر AB در نقطه Q مماس است. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی وتر مشترک این دو دایره AD را نصف می‌کند که AD با BC موازی باشد.

راه حل

فرض کنید PQ وتر مشترک دایره‌ها را در نقطه K ، دایره محیطی مثلث QCD را برای بار دوم در نقطه R و دایره محیطی مثلث PAB را برای بار دوم در نقطه S قطع کند. فرض کنید امتداد BA و CD یکدیگر را در نقطه O قطع می‌کنند و

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OC = c, \quad OD = d, \quad OP = p, \quad OQ = q$$

در این صورت

$$KP \times KS = KE \times EF = KQ \times KR$$

بنابراین

$$\frac{PR}{KP} = \frac{KR}{KP} - 1 = \frac{KS}{KQ} - 1 = \frac{QS}{KQ}$$

در نتیجه، تساوی $KP = KQ$ با $PR = QS$ و یا

$$CP \times DP = PR \times PQ = QS \times PQ = AQ \times BQ$$

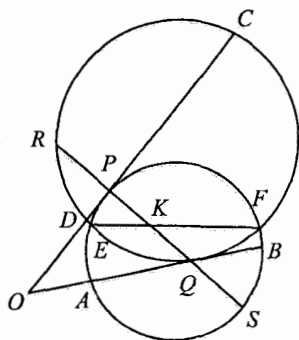
هم‌ارز است. چون $p^2 = ab$ و $q^2 = cd$ ، تساوی

$$(c-p)(p-d) = (q-a)(b-q)$$

را می‌توان به صورت

$$(ac - bd)(bc - ad) = 0$$

نوشت. چون $b > a$ و $c > d$ ، باید $ac - bd = 0$ یا $\frac{b}{a} = \frac{c}{d}$. این تساوی هم وقتی و فقط وقتی درست است که BC با AD موازی باشد.



شکل ۱۰

مسئله ۲. به ازای عدد طبیعی معلوم x ، D -زنجیری از x به طول d دنباله‌ای مانند

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_d$$

است که

$$1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_d = x$$

و x_i, x_{i+1} را می‌شمارد $(1 \leq i \leq d-1)$. برای عدد $5^k \times 3^l \times 199^n$ که در آن m, k و n عددهایی طبیعی‌اند، بلندترین طول D -زنجیرها و تعداد D -زنجیرهای به این طول را پیدا کنید.

را دهی

عدد طبیعی معلوم x تعدادی متناهی D -زنجیر دارد، بنابراین یکی از آنها بیشترین طول را، مثلاً به اندازه d ، دارد. در چنین D -زنجیری، $\frac{x_{i+1}}{x_i} (1 \leq i \leq d-1)$ عددی اول است، زیرا در غیر این صورت می‌توان جمله‌ای بین x_i و x_{i+1} اضافه کرد. فرض کنید تجزیه x به عددهای اول به شکل $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ باشد. می‌توانیم هر بار یکی از $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$ عدد اول را اضافه کنیم. در نتیجه

$$d = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r$$

تعداد D -زنجیره‌ای به طول d برابر است با تعداد جایگشت‌های α_i تا از p_i ها، $1 \leq i \leq r$ ، که برابر است با

$$\frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r)!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_r!}$$

توجه کنید که در این مسأله، چون

$$5^k \times 31^m \times 199^n = 2^n \times 5^{k+n} \times 31^m \times 199^n$$

پس بلندترین طول D -زنجیره‌ها برابر است با $k + m + 3n$ و تعداد آنها برابر است با

$$\frac{(k + m + 3n)!}{(k + n)! m! (n!)^2}$$

مسألهٔ ۳. دربارهٔ تابع حقیقی-مقدار f که به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی نامنفی تعریف شده است، می‌دانیم که به‌ازای هر دو عدد حقیقی نامنفی مانند x و y ،

$$f(x)f(y) \leq y^2 f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{x}\right)$$

و عددی ثابت مانند M وجود دارد که به‌ازای هر x ، $0 \leq x \leq 1$ ، $|f(x)| \leq M$ ، ثابت کنید $x \geq 0$ ، $f(x) \leq x^2$.

راه‌حل

اگر فرض کنیم $x = y = 0$ ، از نابرابری

$$f(x)f(y) \leq y^2 f\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (*)$$

نتیجه می‌شود $0 \leq f(0)^2$ و در نتیجه

$$f(0) = 0 \leq 0^2$$

فرض کنید $x > 0$. اگر فرض کنیم $y = x$ ، از نابرابری $(*)$ نتیجه می‌شود

$$f(x)^2 \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{x}\right)$$

یا

$$f\left(\frac{x}{x}\right) \geq \frac{1}{2x^2} f(x)^2$$

فرض کنید عددی مثبت مانند x وجود داشته باشد که $f(x_0) > x_0^2$. به استقرا ثابت می‌کنیم که اگر

n عددی صحیح و غیرمنفی باشد،

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) > 2^{2^n-2n-1} x_0^2$$

اگر $n = 0$ ، چون $f(x_0) > x_0^2$ ، این نابرابری درست است. فرض کنید این نابرابری به ازای n درست باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) &\geq \frac{1}{2\left(\frac{x_0}{2^n}\right)^2} f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)^2 > \frac{2^{2n-1}}{x_0^2} \left(2^{2^n-2n-1} x_0^2\right)^2 \\ &= 2^{2^{n+1}-2(n+1)-1} x_0^2 \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که عددی طبیعی مانند N وجود دارد که

$$0 < \frac{x_0}{2^n} \leq 1, \quad n \geq N$$

چون $x_0^2 > 0$ و 2^{2^n-2n-1} بدون کران بزرگ می شود، پس امکان ندارد که عددی ثابت مانند M وجود داشته باشد که

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) < M, \quad n \geq N$$

پس به تناقض رسیده ایم و اگر $x \geq 0$ ، $f(x) \leq x^2$.

یادداشت

می توانیم ثابت کنیم

$$f(x) \leq \frac{x^2}{2}, \quad x \geq 0$$

اگر $x = 0$ ، چون $f(0) = 0$ ، این نابرابری درست است. فرض کنید $x > 0$ و

$$g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

از فرض مسأله نتیجه می شود که

$$g(x) \leq 2g\left(\frac{x}{2}\right)$$

و به استقرا می توان ثابت کرد که به ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$g(x) \leq 2^n g\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$g(x) \leq 2^n f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leq \frac{x^2}{2^n}$$

چون می‌توانیم n را به دلخواه بزرگ انتخاب کنیم، $g(x) \leq 0$ و در نتیجه $f(x) \leq \frac{x^2}{2}$.

مسئله ۴. فرض کنید a عددی طبیعی باشد و A و B عددهایی حقیقی باشند. دستگاه معادله‌های

$$x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = (2A + B) \frac{(13a)^4}{4}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2$$

را در نظر بگیرید. شرطی لازم و کافی درباره A و B پیدا کنید که این دستگاه معادله‌ها در مجموعه عددهای طبیعی (برحسب x, y و z) جواب داشته باشد.

راه‌حل

فرض کنید دستگاه موردنظر (برحسب x, y و z) در مجموعه عددهای طبیعی جواب داشته باشد. با مربع کردن معادله دوم و جایگزین کردن آن در معادله اول نتیجه می‌گیریم

$$(2A - B)(x^4 + y^4 + z^4) = \frac{1}{4}(13a)^4(2A - B)$$

فرض کنید $2A \neq B$. اگر معادله

$$2(x^4 + y^4 + z^4) = (13a)^4$$

(برحسب x, y, z و a) در مجموعه عددهای طبیعی جواب داشته باشد، جوابی مانند

$$(x_0, y_0, z_0, a_0)$$

وجود دارد که $x_0 + y_0 + z_0 + a_0$ در میان همه جوابها کمترین مقدار ممکن را دارد. معلوم است که a_0 باید عددی زوج باشد. بنابراین به‌ازای عددی طبیعی مانند $a_1, a_1 = 2a_0$. بنابراین

$$x_0^4 + y_0^4 + z_0^4 = 8(13a_1)^4 \equiv 0 \pmod{8} \text{ (به‌پیمانه ۸)}$$

چون هریک از x_0^4, y_0^4, z_0^4 به‌پیمانه ۸ با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۴ همنهشت است، پس هیچ‌یک از آنها عددی فرد نیست. در نتیجه عددهایی طبیعی مانند x_1, y_1, z_1 وجود دارند که

$$x_0 = 2x_1, \quad y_0 = 2y_1, \quad z_0 = 2z_1$$

بنابراین

$$x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = (13a_1)^4$$

$$x_1 + y_1 + z_1 + a_1 < x_0 + y_0 + z_0 + a_0.$$

پس به تناقض رسیده‌ایم و باید $B = 2A$.

برعکس، اگر $B = 2A$ ، معادله‌های دستگاه موردنظر هم‌ارزند و اگر a عددی طبیعی باشد و $x = 3a, y = 4a, z = 12a$ ، آنگاه (x, y, z) جواب معادله $x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2$ است.

مسأله ۵. فرض کنید X مجموعه‌ای متناهی باشد و $E(X)$ گردایه زیرمجموعه‌هایی از X باشد که تعداد عضوهایشان عددی زوج است. تابع حقیقی-مقدار f روی $E(X)$ طوری تعریف شده است که دست‌کم به‌ازای یک عضو از $E(X)$ مانند D ، $f(D) > 1990$ و به‌ازای هر دو عضو جدا از هم $E(X)$ مانند A و B ،

$$f(A \cap B) = f(A) + f(B) - 1990$$

ثابت کنید می‌توان X را به دو زیرمجموعه جدا از هم مانند P و Q افزایش کرد، به‌طوری که به‌ازای هر عضو ناتهی از $E(P)$ مانند S ، $f(S) > 1990$ و به‌ازای هر عضو از $E(Q)$ مانند T ، $f(T) \leq 1990$.

راه‌حل اول

در میان عضوهای $E(X)$ ، P را طوری انتخاب کنید که $f(P)$ بیشترین مقدار ممکن باشد. اگر بیش از یک انتخاب برای P وجود داشت، زیرمجموعه‌ای را انتخاب کنید که تعداد عضوهایش کمترین مقدار ممکن است. اگر چندین زیرمجموعه با این ویژگی‌ها وجود داشتند، یکی از آنها را به دلخواه انتخاب کنید. فرض کنید $Q = X - P$. چون به‌ازای D ای در $E(X)$ ، $f(D) > 1990$ ، پس $f(P) > 1990$. فرض کنید S عضوی ناتهی از $E(P)$ باشد و $S \neq P$. در این صورت، $P - S$ هم عضو $E(P)$ است و تعداد عضوهایش از تعداد عضوهای P کمتر است. بنابراین $f(P - S) < f(P)$. در نتیجه، چون

$$f(P) = f(S \cup (P - S)) = f(S) + f(P - S) - 1990$$

پس $f(S) > 1990$. اکنون فرض کنید T عضوی از $E(Q)$ باشد. در این صورت $f(P \cup T) \leq f(P)$.

چون

$$f(P \cup T) = f(P) + f(T) - 1990$$

پس $f(T) \leq 1990$.

راه‌حل دوم

به‌ازای هر عضو $E(X)$ مانند M فرض کنید

$$g(M) = f(M) - 1990$$

در این صورت، اگر A و B دو عضو جدا از هم $E(X)$ باشند،

$$g(A \cup B) = g(A) + g(B)$$

فرض کنید $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. اگر $1 \leq i \leq j \leq n$ ، $g(\{a_i, a_j\})$ را با $g_{i,j}$ نشان دهید. در این صورت اگر k و m عددهایی طبیعی و متمایز و کوچکتر از یا مساوی n باشند،

$$g_{i,j} + g_{k,m} = g(\{a_i, a_j, a_k, a_m\}) = g_{i,k} + g_{j,m}$$

عددهای حقیقی $x_1, x_2, \dots, x_n$ را این طور تعریف کنید:

$$x_1 = \frac{1}{2} (g_{1,2} + g_{1,3} - g_{2,3})$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (g_{1,2} + g_{2,3} - g_{1,3})$$

و

$$x_k = \frac{1}{2} (g_{1,k} + g_{2,k} - g_{1,2}), \quad 3 \leq k \leq n$$

اگر k و m عددهایی طبیعی و متمایز و بزرگتر از ۲ باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} x_k + x_m &= \frac{1}{2} (g_{1,k} + g_{2,m} + g_{1,m} + g_{2,k} - 2g_{1,2}) \\ &= \frac{1}{2} (g_{1,2} + g_{k,m} + g_{k,m} - 2g_{1,2}) \\ &= g_{k,m} \end{aligned}$$

اگر k یا m برابر با ۱ یا ۲ باشد، باز هم تساوی بالا درست است. پس به‌ارای هر i و هر j ، $1 \leq i \leq j \leq n$

$$x_i + x_j = g_{i,j}$$

و در نتیجه، می‌توان g را با تعریف

$$g(\{a_i\}) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

به کمک رابطه

$$g(A \cup B) = g(A) \cup g(B)$$

روی همه زیرمجموعه‌های X تعریف کرد.

فرض کنید

$$P = \{a \in X : g(a) > 0\}$$

و $Q = X - P$. به ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی مانند $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k}\}$ در $E(P)$,

$$g(S) = g_{1,2} + g_{3,4} + \dots + g_{2k-1,2k} > 0$$

که با نابرابری $f(S) > 1990$ هم‌ارز است. به همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که اگر T عضوی از $E(Q)$ باشد، $f(T) \leq 1990$.

مسئلهٔ ۶. هر n ضلعی محدب را می‌توان با ترسیم $(n-3)$ تا از قطرهایش که هیچ دو تایی از آنها جز در رأسها متقاطع نیستند به $n-2$ مثلث افراز کرد. ثابت کنید همهٔ ضلعها و قطرهای چنین افرازی را می‌توان روی مسیر چندضلعی بسته و پیوسته‌ای بی‌آنکه از قسمتی از مسیر بیش از یک‌بار عبور کنیم طی کرد، اگر و فقط اگر n مضربی از ۳ باشد.

راه‌حل

مثلث‌بندی را به عنوان گرافی مسطح در نظر بگیرید. ابتدا فرض کنید مسیر اویلری بسته‌ای وجود داشته باشد. در این صورت درجهٔ همهٔ رأسها زوج است و ناحیه‌ها را می‌توان با رنگهای سیاه و سفید طوری رنگ کرد که ناحیه‌های مجاور هم‌رنگ نباشند. بنابراین تعداد کل یالهای ناحیه‌های سیاه با تعداد کل یالهای ناحیه‌های سفید برابر است. چون غیر از ناحیهٔ بی‌کران، بقیهٔ ناحیه‌ها سه یال دارند، تعداد یالهای ناحیهٔ بی‌کران، یعنی m ، باید مضرب ۳ باشد.

برعکس، فرض کنید به ازای عددی طبیعی مانند m ، $n = 3m$. از استقرا روی m استفاده می‌کنیم. اگر $m = 1$ ، n ضلعی محدب مورد نظر مثلث است، که مسیر اویلری بسته دارد. فرض کنید حکم به ازای عدد طبیعی m درست باشد. $(m+1)$ ضلعی $A_1 A_2 \dots A_{3m+3}$ را در نظر بگیرید. ابتدا این چندضلعی را به پنج ضلعی محدب $A_1 A_2 \dots A_5$ و $3m$ ضلعی محدب $A_1 A_5 A_6 \dots A_{3m+3}$ افرا کنید. بنابر فرض استقرا، $A_1 A_5 A_6 \dots A_{3m+3}$ مثلث‌بندی دارد که گراف نظیرش مسیر اویلری بسته دارد. پنج ضلعی $A_1 A_2 \dots A_5$ را با ترسیم قطرهای $A_1 A_3$ و $A_3 A_5$ مثلث‌بندی کنید. اکنون مسیر بستهٔ اویلری نظیر $A_1 A_5 A_6 \dots A_{3m+3}$ با ابتدا و انتهای A_1 را با طی کردن $A_3 A_5$ ، $A_5 A_6$ ، $A_6 A_7$ ، $A_7 A_8$ ، $A_8 A_9$ و $A_9 A_1$ تکمیل کنید.

ششمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۱

مسأله ۱. اگر نقطه‌ای مانند P در صفحه چهارضلعی محدب $ABCD$ وجود داشته باشد که مساحت مثلثهای ABP ، BCP ، CDP و DAP برابر باشند، ویژگی مشخص چهارضلعی $ABCD$ چیست؟ حداکثر چند نقطه مانند P ممکن است وجود داشته باشد؟

راه حل

فرض کنید E نقطه برخورد AC و BD باشد. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که نقطه P درون $ABCD$ است. اگر P و E بر هم منطبق باشند، آن وقت $PA = PC$ و $PB = PD$ و هر یک از قطرهای $ABCD$ مساحتش را نصف می‌کند. اگر P و E بر هم منطبق نباشند، می‌توانیم فرض کنیم P روی BD قرار ندارد. چون مساحت PAB با مساحت PAD برابر است، نقطه F ، وسط BD ، باید روی PA قرار داشته باشد. چون مساحت PCB و مساحت PCD برابر است، F باید روی PC هم قرار داشته باشد. بنابراین E و F بر هم منطبق‌اند و P روی AC قرار دارد. چون مساحت PAB با مساحت PCB برابر است، P وسط AC است و AC مساحت $ABCD$ را نصف می‌کند. برای اینکه نقطه‌ای مانند P وجود داشته باشد، یکی از قطرهای چهارضلعی باید مساحتش را نصف کند و P وسط این قطر باشد.

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که P بیرون $ABCD$ است. اگر P' نقطه‌ای درون ناحیه‌ای باشد که محدود به امتداد دو ضلع مجاور چهارضلعی، مانند BA و DA ، است، آن وقت

$$S_{P'CB} + S_{P'CD} = S_{P'AB} + S_{P'AD} + S_{ABCD} > S_{P'AB} + S_{P'CD}$$

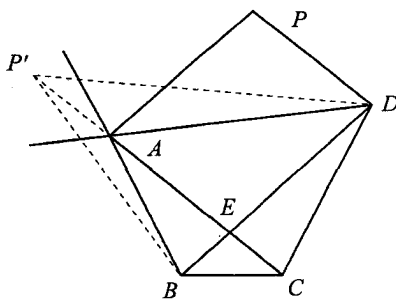
بنابراین P باید درون ناحیه‌ای قرار داشته باشد که محدود به یک ضلع چهارضلعی و امتدادهای دو ضلع روبه‌روی هم از چهارضلعی است. فرض کنید P درون ناحیه محدود به ضلع AD و امتداد ضلعهای BA و CD قرار داشته باشد. چون مساحت PAB و مساحت PAD برابر است، پس PA با BD موازی است. چون مساحت PAD و مساحت PCD برابر است، پس PD با AC موازی است. به این ترتیب

$$S_{ADE} = S_{PAD} = S_{PAB} + S_{PCD} + S_{PCB} - S_{ABCD}$$

و در نتیجه

$$S_{ADE} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

برای اینکه نقطه‌ای مانند P وجود داشته باشد، باید مساحت یکی از چهار مثلثی که از برخورد قطرهای به‌وجود می‌آیند برابر با نصف مساحت چهارضلعی باشد و P هم رأس چهارم متوازی‌الاضلاع باشد که ضلعهایش با قطرهای چهارضلعی موازی‌اند و این مثلث را دربر دارد. چون این شرایط با شرایط وجود چنین نقطه‌ای درون چهارضلعی همخوانی ندارد، پس حداکثر یک نقطه مانند P ممکن است وجود داشته باشد.



شکل ۱۱

مسأله ۲. همه تابعها مانند $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ را پیدا کنید، به‌طوری که به‌ازای هر x, y و z در $[0, 1]$

$$f(x, 1) = x$$

$$f(1, y) = y$$

$$f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$$

و به‌ازای عددی ثابت و مثبت و مستقل از x, y و z مانند k ,

$$f(zx, zy) = z^k f(x, y)$$

راه حل

فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. ابتدا توجه کنید که به ازای هر z ,

$$f(0, 0) = f(z \times 0, z \times 0) = z^k f(0, 0)$$

پس $f(0, 0) = 0$. اگر $0 < y < x \leq 0$ ، آن وقت

$$f(x, y) = y^k f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = xy^{k-1}$$

به همین ترتیب، اگر $0 < x < y \leq 0$ ، آن وقت

$$f(x, y) = x^{k-1}y$$

فرض کنید $1 < x < y < z < 0$ و آنقدر کوچک باشد که

$$y^{k-1}x < z, \quad x < z^{k-1}y$$

در این صورت

$$\begin{aligned} xy^{k-1}z^{k-1} &= f(xy^{k-1}, z) = f(f(x, y), z) \\ &= f(x, f(y, z)) = f(x, yz^{k-1}) \\ &= x(yz^{k-1})^{k-1} \end{aligned}$$

بنابراین $0 = (k-2)(k-1)$. اگر $k = 1$ ، آن وقت

$$f(x, y) = \min\{x, y\}$$

و اگر $k = 2$ ، آن وقت

$$f(x, y) = xy$$

به سادگی می توان تحقیق کرد این تابعها ویژگیهای موردنظر را دارند.

مسأله ۳. ده پرندۀ کوچک از زمینی هموار دانه برمی چینند. از هر پنج پرندۀ، دست کم چهارتا روی یک دایره قرار دارند. کمترین مقدار بیشترین تعداد از این ده پرندۀ که ممکن است روی یک دایره باشند چقدر است؟

راه حل

هر پرندۀ را با نقطه ای نشان می دهیم. اگر هر چهار نقطه از ده نقطه روی یک دایره باشند، هر ده نقطه روی یک دایره قرار دارند. پس فرض می کنیم که چهار نقطه مانند A, B, C و D وجود دارند که روی یک دایره نیستند. ثابت می کنیم پنج نقطه وجود دارند که حتماً باید روی یک دایره باشند. توجه کنید که

دایره‌های محیطی مثلثهای ABC, BCD, CDA و DAB متمایزند. بنابر فرض مسأله، هریک از چهار نقطه دیگر باید روی یکی از این دایره‌ها باشد. در نتیجه، بنابر اصل لانه کبوتری، دوتا این نقطه‌ها و سه‌تا از نقطه‌های A, B, C و D باید روی یک دایره باشند. فرض کنید ω_1 دایره‌ای باشد که پنج‌تا از ده نقطه، مثلاً نقطه‌های P_1, P_2, P_3, P_4 و P_5 ، روی آن قرار دارند. فرض کنید دوتا از نقطه‌ها مانند R و Q روی ω_1 نباشند. در این صورت چهارتا از نقطه‌های P_1, P_2, P_3, P_4 و Q روی دایره‌ای متمایز از ω_1 مانند ω_2 قرار دارند. می‌توانیم فرض کنیم P_5 روی ω_2 قرار ندارد. به همین ترتیب، چهارتا از نقطه‌های P_1, P_2, P_3, P_4 و P_5 و R و Q روی دایره‌ای متمایز از ω_1 مانند ω_3 قرار دارند. اگر ω_2 و ω_3 بر هم منطبق باشند، دست‌کم چهارتا از نقطه‌های P_1, P_2, P_3, P_4 و P_5 روی آنها قرار دارند و این هم ممکن نیست، زیرا این دایره‌ها متمایز از ω_1 هستند. بنابراین ω_2 و ω_3 بر هم منطبق نیستند و می‌توانیم فرض کنیم P_5 روی ω_3 قرار ندارد. چهارتا از نقطه‌های P_1, P_2, P_3, P_4 و Q و R هم روی دایره‌ای متمایز از ω_1 مانند ω_4 قرار دارند. اگر P_1 روی ω_4 باشد، ω_4 و ω_2 بر هم منطبق‌اند. در غیر این صورت، P_3 روی ω_4 قرار دارد و ω_4 و ω_3 بر هم منطبق‌اند. هیچ‌یک از این حالتها هم ممکن نیست. بنابراین ω_2 از دست‌کم نه‌تا از ده نقطه می‌گذرد. بنابراین کمترین مقدار موردنظر برابر با ۹ است.

مسأله ۴. همه چهارتاییها از عددهای طبیعی مانند (n, x, y, z) را طوری پیدا کنید که

$$n \geq 2, \quad z \leq 5 \times 2^{2n}, \quad x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1}$$

راه‌حل

فرض کنید چهارتایی (n, x, y, z) ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. توجه کنید که $x > y$ اگر یکی از x و y زوج باشد، دیگری هم زوج است. بنابراین $x - y \geq 2$. اگر $y = 1$ و $x = 3$ ، آن‌وقت

$$z = 3^{2n} - \frac{2^{2n+1}}{3} \geq 3^{2n} - 2^{2n}$$

و چون

$$3^{2n} - 2^{2n} \leq z \leq 5 \times 2^{2n}$$

پس $n \leq 2$. چون $n \geq 2$ ، پس $n = 2$ و در نتیجه $z = 70$. فرض کنید $y = 1$ و $x \geq 4$. در این صورت

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - xyz &= x(x^{2n} - z) \geq 4(4^{2n} - 5 \times 2^{2n}) \\ &= 2^{2n+2}(2^{2n} - 5) > 2^{2n+1} + 1 \\ &= 2^{2n+1} + y^{2n+1} \end{aligned}$$

پس در این حالت جوابی وجود ندارد.

فرض کنید $y \geq 2$. در این صورت

$$\begin{aligned}
 x^{2n+1} - xyz &\geq x \left((y+2)^{2n} - yz \right) \\
 &= x \left(y^{2n} + 4ny^{2n-1} + 4n(2n-1)y^{2n-2} + \dots + 2^{2n} - yz \right) \\
 &> xy^{2n} + 2^{2n}x + y \left(4ny^{2n-2} + 4n(2n-1)y^{2n-3} - 5 \times 2^{2n} \right) \\
 &> y^{2n+1} + 2^{2n+1} + 2^{2n-3}y(8n + 4n(2n-1) - 40) \\
 &\geq y^{2n+1} + 2^{2n+1}
 \end{aligned}$$

پس در این حالت هم جوابی وجود ندارد. پس فقط یک جواب وجود دارد، یعنی

$$(n, x, y, z) = (2, 3, 1, 70)$$

مسأله ۵. همه عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که ۱۹۹۱ کمترین مقدار

$$k^2 + \left\lceil \frac{n}{k^2} \right\rceil$$

باشد، که در اینجا k در میان مجموعه عددهای طبیعی تغییر می‌کند.

راه‌حل

اگر عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد، آن وقت به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k ،

$$k^2 + \frac{n}{k^2} \geq 1991$$

یا

$$\left(k^2 - \frac{1991}{2} \right)^2 + n - \frac{1991^2}{4} \geq 0$$

نزدیکترین مربع کامل به $\frac{1991}{2}$ ، ۳۲۲ است. بنابراین

$$n \geq \frac{1991^2}{4} - \left(322 - \frac{1991}{2} \right)^2 = 990208$$

از طرف دیگر، باید عددی طبیعی مانند m وجود داشته باشد که

$$m^2 + \frac{n}{m^2} < 1992$$

یا

$$(m^2 - 996)^2 + n - 996^2 < 0$$

بنابراین

$$n < 996^2 - (32^2 - 996)^2 = 991232$$

پس عددهای موردنظر همهٔ عددهای طبیعی مانند n هستند که

$$990208 \leq n \leq 991231$$

مسئلهٔ ۶. هر رأس چندوجهی محدب روی دقیقاً سه یال قرار دارد و می‌توان یالها را با سه رنگ طوری رنگ کرد که هر رأس، روی یک یال از هر رنگ قرار داشته باشد. ثابت کنید می‌توان به هر رأس عددی مختلط و مخالف ۱ نسبت دارد، به طوری که حاصل ضرب عددهای روی رأسهای هر وجه برابر با ۱ باشد.

راه حل اول

به یالهای قرمز، زرد و آبی به ترتیب عددهای مختلط r ، y و b را نسبت می‌دهیم، به طوری که

$$\frac{r}{y} = \frac{y}{b} = \frac{b}{r} = \lambda$$

که در آن λ عددی مختلط و مخالف ۱ است. اگر فرض کنیم $r = 1$ ، آن وقت

$$b = y^2, \quad 1 = r = \frac{b}{y} = y^3$$

می‌توانیم فرض کنیم $y = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ ، در این صورت

$$b = \lambda = e^{\frac{4\pi i}{3}} \neq 1$$

اگر سه یالی که در یک رأس به هم می‌رسند در جهت ساعتگرد قرمز، زرد و آبی باشند، به این رأس λ و در غیر این صورت به آن $\frac{1}{\lambda}$ را نسبت می‌دهیم $\left(\frac{1}{\lambda} = e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)$. فرض کنید به رأسهای وجهی n رأسی در جهت ساعتگرد عددهای مختلط $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ را نسبت داده‌ایم. فرض کنید β_k عدد نسبت داده شده به یال میان α_k و α_{k+1} باشد، $1 \leq k \leq n-1$ و β_n عدد مختلط نسبت داده شده به یال میان α_n و α_1 باشد. در این صورت

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_n}, \quad \alpha_k = \frac{\beta_k}{\beta_{k-1}}, \quad 2 \leq k \leq n$$

به این ترتیب

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = \frac{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n}{\beta_n \beta_1 \cdots \beta_{n-1}} = 1$$

راه حل دوم

به رأسها همان عددهای راه حل اول را نسبت می دهیم، اما در اینجا به یالهای قرمز، زرد و آبی به ترتیب $1, 0$ و 2 را نسبت می دهیم. فرض کنید به یالهای وجهی n رأسی در جهت ساعتگرد عددهای مختلط $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ را نسبت داده ایم. فرض کنید به k تا از رأسهای این وجه $e^{\frac{2\pi i}{r}}$ و به m رأس باقی مانده $e^{\frac{2\pi i}{r}}$ را نسبت داده ایم ($m = n - k$). اگر به رأس میان یالهایی که به آنها β_{j+1} و β_j را نسبت داده ایم عدد مختلط $e^{\frac{2\pi i}{r}}$ را نسبت داده باشیم، آن وقت

$$\beta_{j+1} - \beta_j \equiv 1 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

و اگر به این رأس $e^{\frac{2\pi i}{r}}$ را نسبت داده باشیم، آن وقت

$$\beta_{j+1} - \beta_j \equiv 2 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 0 &= (\beta_1 - \beta_n) + \sum_{j=1}^{n-1} (\beta_{j+1} - \beta_j) \\ &\equiv k + 2m \quad (\text{به پیمانه } 3) \end{aligned}$$

بنابراین حاصل ضرب عددهایی که به رأسها نسبت داده ایم برابر است با

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{r}}\right)^k \left(e^{\frac{2\pi i}{r}}\right)^m = e^{2\pi i \frac{k+2m}{r}} = 1$$

هفتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۲

مسأله ۱. فرض کنید $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ عددهایی حقیقی باشند و

$$0 < a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq 1$$

فرض کنید λ ریشه‌ای مختلط از معادله

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

باشد و $|\lambda| \geq 1$. ثابت کنید $\lambda^{n+1} = 1$.

راه حل اول

توجه کنید که

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

اگر دو طرف این تساوی را در $\lambda - 1$ ضرب کنیم به دست می‌آید

$$\lambda^{n+1} = (1 - a_{n-1})\lambda^n + (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1} + \dots + (a_1 - a_0)\lambda + a_0$$

چون همه ضریبها در سمت راست تساوی بالا غیر منفی‌اند، پس

$$|\lambda|^{n+1} \leq (1 - a_{n-1})|\lambda|^n + (a_{n-1} - a_{n-2})|\lambda|^{n-1} + \dots + (a_1 - a_0)|\lambda| + a_0$$

چون $|\lambda| \geq 1$ ، پس سمت راست نابرابری بالا از

$$|\lambda|^n ((1 - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_1 - a_0) + a_0)$$

یا $|\lambda|^n$ بیشتر نیست، بنابراین $|\lambda|^{n+1} \leq |\lambda|^n$ و در نتیجه $|\lambda| \leq 1$. پس $|\lambda| = 1$. به این ترتیب،

$$|\lambda|^{n+1} = |(1 - a_{n-1})\lambda^n| + |(a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}| + \dots + |(a_1 - a_0)\lambda| + |a_0|$$

چون a_0 عددی حقیقی و مثبت است، پس هر یک از عدددهای

$$\lambda^{n+1}, (1 - a_{n-1})\lambda^n, (a_{n-1} - a_{n-2})\lambda^{n-1}, \dots, (a_1 - a_0)\lambda$$

حقیقی و نامنفی است. به ویژه،

$$\lambda^{n+1} = |\lambda^{n+1}| = |\lambda|^{n+1} = 1$$

راه حل دوم

فرض کنید $|\lambda| = \alpha$ ، $\beta = \frac{1}{\alpha}$ ، $b_n = |\lambda|^n$ ، $b_{-1} = 0$ ، $\beta = \frac{1}{\alpha}$ و

$$b_k = a_k |\lambda|^k, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

در این صورت $|\alpha| = |\beta| = 1$ و

$$0 < b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n$$

$$b_n \alpha^n + b_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + b_1 \alpha + b_0 = 0$$

اگر دو طرف تساوی بالا را در $\alpha - 1$ ضرب کنیم به دست می آید

$$\begin{aligned} & 0 = b_n \alpha^{n+1} + (b_{n-1} - b_n) \alpha^n + \dots + (b_0 - b_1) \alpha - b_0 \\ & = \alpha^{n+1} \left((b_n - b_{n-1})(1 - \beta) + (b_{n-1} - b_{n-2})(1 - \beta^2) + \dots \right. \\ & \quad \left. + (b_1 - b_0)(1 - \beta^n) + (b_0 - b_{-1})(1 - \beta^{n+1}) \right) \end{aligned}$$

اگر $0 \leq k \leq n$ ، چون $b_n - b_{k-1} \geq 0$ و $|\beta| = 1$ ، پس

$$\operatorname{Re}((b_k - b_{k-1})(1 - \beta^{n+1-k})) \geq 0$$

چون مجموع قسمت‌های حقیقی این $n+1$ عدد برابر با صفر است، پس هر یک از آنها برابر با صفر است. چون

$$\operatorname{Re}((b_0 - b_{-1})(1 - \beta^{n+1})) = 0, \quad b_0 - b_{-1} > 0$$

پس

$$\operatorname{Re}(1 - \beta^{n+1}) = 0$$

چون $|\beta| = 1$ ، پس $\beta^{n+1} = 1$ و در نتیجه $\alpha^{n+1} = 1$. چون λ ریشه‌ای از معادله مورد نظر است،

پس عددی حقیقی نیست. بنابراین $\alpha \neq 1$ و $\beta \neq 1$ چون $|\beta| = 1$ پس $\operatorname{Re}(1 - \beta) \neq 0$. چون

$$\operatorname{Re}((b_n - b_{n-1})(1 - \beta)) = 0$$

پس $b_n = b_{n-1}$ و در نتیجه

$$|\lambda|^n = a_{n-1} |\lambda|^{n-1}$$

بنابراین

$$a_{n-1} = |\lambda| \geq 1$$

اما $a_{n-1} \leq 1$ بنابراین $|\lambda| = 1$ و

$$\lambda^{n+1} = |\lambda|^{n+1} \alpha^{n+1} = \alpha^{n+1} = 1$$

مسئله ۲. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددهایی حقیقی و غیرمنفی باشند و a کوچکترین این عددها باشد. ثابت کنید

$$\frac{1+x_1}{1+x_2} + \frac{1+x_2}{1+x_3} + \dots + \frac{1+x_{n-1}}{1+x_n} + \frac{1+x_n}{1+x_1}$$

از

$$n + \frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + \dots + (x_n - a)^2}{(1+a)^2}$$

کمتر یا با آن برابر است. همچنین، ثابت کنید برابری وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

راه حل اول

حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$ ، هر دو عبارت برابر با ۱ هستند و حکم درست است. فرض کنید حکم به‌ازای عددی طبیعی مانند n درست باشد. فرض کنید a کوچکترین عدد در میان عددهای غیرمنفی $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ باشد. می‌توانیم فرض کنیم x_{n+1} بزرگترین این عددهاست. بنابر فرض استقری،

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1+x_i}{1+x_{i+1}} + \frac{1+x_n}{1+x_{n+1}} \leq n + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$$

پس کافی است ثابت کنیم

$$\frac{1+x_n}{1+x_{n+1}} + \frac{1+x_{n+1}}{1+x_1} - \frac{1+x_n}{1+x_1} \leq 1 + \left(\frac{x_{n+1} - a}{1+a} \right)^2$$

این نابرابری با نابرابری

$$\frac{(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} - x_1)}{(1 + x_{n+1})(1 + x_1)} \leq \left(\frac{x_{n+1} - a}{1 + a} \right)^2$$

هم‌ارز است. این نابرابری هم درست است، زیرا $a \leq x_1, x_n \leq x_{n+1}$. برای اینکه در این نابرابری تساوی برقرار باشد، باید $x_1 = x_n = x_{n+1} = a$ و در نتیجه

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n+1}$$

راه‌حل دوم

فرض کنید $x_{n+1} = x_1$. چون

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + a} = 0.$$

نابرابری موردنظر با نابرابری

$$\sum_{i=1}^n \frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} \leq \sum_{i=1}^n \left(1 + \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + a} + \left(\frac{x_{i+1} - a}{1 + a} \right)^2 \right)$$

هم‌ارز است. اگر $1 \leq i \leq n$ ، نابرابری

$$\frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} \leq 1 + \frac{x_i - x_{i+1}}{1 + a} + \left(\frac{x_{i+1} - a}{1 + a} \right)^2$$

با نابرابری

$$\frac{(x_i - x_{i+1})(a - x_{i+1})}{(1 + a)(1 + x_{i+1})} \leq \left(\frac{x_{i+1} - a}{1 + a} \right)^2$$

هم‌ارز است. اگر $x_i > x_{i+1}$ ، سمت چپ این نابرابری غیرمثبت و نابرابری درست است. اگر $x_i \leq x_{i+1}$ ، چون $a \leq x_i$ ، پس باز هم این نابرابری درست است. بنابراین نابرابری موردنظر درست است. برای اینکه تساوی پیش بیاید، باید (به‌ازای $1 \leq i \leq n$)

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_{i+1}} = \frac{x_{i+1} - a}{1 + a}$$

که هم‌ارز است با

$$(x_{i+1} - a)^2 + (1 + a)(x_i - a) = 0$$

چون هر دو جمله سمت چپ این تساوی غیرمنفی‌اند، پس هر دو آنها صفرند. یعنی

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n$$

مسأله ۳. به هر یک از خانه‌های صفحه شطرنجی 9×9 در ابتدا به دلخواه ۱ یا -۱ را نسبت می‌دهیم. به ازای هر خانه مانند C ، حاصل ضرب عددهای خانه‌هایی را حساب کنید که دقیقاً یک ضلع مشترک با C دارند و بعد همه این عددها را با مقدار این حاصل ضرب جایگزین کنید. آیا می‌توان این کار را چندبار (متناهی) انجام داد و همه ۸۱ عدد را به ۱ تبدیل کرد؟

راه حل اول

ابتدا حالت 4×4 را بررسی می‌کنیم. در ابتدا فقط به یکی از گوشه‌ها ۱- را نسبت می‌دهیم و پس از مدتی به دو جدول می‌رسیم که یکی در میان تکرار می‌شوند. اگر این دو شکل را روی هم قرار دهیم، به شکل ۱۲ (الف) می‌رسیم که با انجام عمل موردنظر تغییری نمی‌کند. می‌توانیم چهار نسخه از این شکل را مانند شکل ۱۲ (ب) کنار هم قرار دهیم، که این شکل هم با انجام عمل موردنظر تغییری نمی‌کند. بنابراین همواره نمی‌توان همه ۸۱ عدد را به ۱ تبدیل کرد.

	-۱	-۱	-۱		-۱	-۱	-۱	
-۱		-۱				-۱		-۱
-۱	-۱						-۱	-۱
-۱								-۱
-۱								-۱
-۱	-۱						-۱	-۱
-۱		-۱				-۱		-۱
	-۱	-۱	-۱		-۱	-۱	-۱	

(ب)

	-۱	-۱	-۱
-۱		-۱	
-۱	-۱		
-۱			

(الف)

شکل ۱۲

راه حل دوم

فرض کنید در ابتدا فقط یک -۱، آن هم به مربع مرکزی نسبت داده باشیم. در این صورت دنباله‌ای به دست می‌آوریم که عضو نهم آن با عضو سومش یکسان است. این روند همین‌طور ادامه پیدا می‌کند و هیچ‌گاه همه ۸۱ عدد به -۱ تبدیل نمی‌شوند.

مسأله ۴. چهارضلعی محدب $ABCD$ در دایره‌ای به مرکز O محاط شده است. قطرهای AC و

BD این چهارضلعی یکدیگر را در نقطه P قطع کرده‌اند. دایره‌های محیطی مثلث‌های ABP و CDP برای بار دوم یکدیگر را در نقطه Q قطع کرده‌اند. اگر O, P و Q سه نقطه متمایز باشند، ثابت کنید OQ بر PQ عمود است.

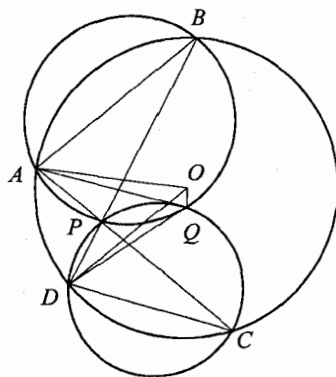
راه حل

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\angle AQD &= \angle AQP + \angle PQO \\ &= \angle ABP + \angle ACD \\ &= 2\angle ABP = \angle AOD\end{aligned}$$

بنابراین $AOQD$ چهارضلعی محاطی است. در نتیجه

$$\begin{aligned}\angle OQP &= \angle OQA + \angle AQP \\ &= \angle ODA + \angle ABD \\ &= \angle ODA + \frac{1}{2}\angle AOD = 90^\circ\end{aligned}$$



شکل ۱۳

مسئله ۵. گرافی ۸ رأسی داریم که طوق، یال چندگانه یا دوری به طول ۴ ندارد. این گراف حداکثر چند یال ممکن است داشته باشد؟

راه حل

شکل ۱۴ گرافی را با ۱۱ یال نشان می‌دهد که ویژگیهای مورد نظر را دارد. فرض کنید گرافی با ویژگیهای مورد نظر وجود داشته باشد که ۱۲ یال دارد. فرض کنید A رأسی با بزرگترین درجه ممکن باشد. اگر

درجهٔ A برابر با n باشد، آنوقت $n \geq 3$. فرض کنید A با رأسهای $B_1, B_2, \dots, B_n$ مجاور باشد و بقیهٔ رأسهای گراف هم $C_1, C_2, \dots, C_{\gamma-n}$ باشند. اگر B_i و C_i با هر دو B_j و B_k مجاور باشند، دوری به طول ۴ که یک رأسش A است به وجود می‌آید. بنابراین، حداکثر $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ یال به شکل $B_i B_j$ و حداکثر $\gamma - n$ یال به شکل $B_i C_j$ وجود دارد. همچنین، تعداد یالهای به شکل $C_i C_j$ حداکثر برابر است با $\binom{\gamma-n}{2}$. بنابراین تعداد یالهای گراف موردنظر حداکثر برابر است با

$$f(n) = n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + (\gamma - n) + \binom{\gamma - n}{2}$$

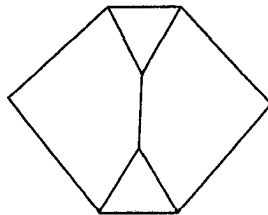
اما

$$f(5) = f(6) = f(7) = 10 < 12$$

در حالی‌که

$$f(4) = 12$$

اگر $n = 4$ ، تعداد یالهای به شکل $B_i B_j, B_i C_j$ و $C_i C_j$ به ترتیب حداکثر ۲، ۳ و ۳ است. می‌توانیم فرض کنیم B_1 و B_2 مجاور باشند، B_3 و B_4 مجاور باشند و C_1, C_2 و C_3 با هم مجاور باشند. هیچ‌یک از B_i ها ممکن نیست با دوتا از C_j ها مجاور باشد، زیرا در غیر این صورت با رأس باقی‌مانده از C_j ها دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند. بنابراین سه‌تا از B_i ها با C_j های متمایزی مجاورند. اما در این صورت یا B_1 یا B_2 یا B_3 و B_4 با دوتا از C_j ها دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند. اگر $n = 3$ ، درجهٔ همهٔ رأسها برابر با ۳ است. اگرچه $f(3) = 14$ ، اما حداکثر ۴ یال به شکل $C_i C_j$ ممکن است وجود داشته باشد. بنابراین تعداد یالهای به شکل $B_i B_j, B_i C_j$ و $C_i C_j$ به ترتیب حداکثر برابر با ۱، ۳ و ۴ است. علاوه بر این، یکی از C_j ها با سه‌تای دیگر مجاور است. پس یکی دیگر از C_j ها با دوتا از B_i ها مجاور است که به این ترتیب با A دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۴

مسئلهٔ ۶. فرض کنید a_0 و a_1 عددهایی صحیح باشند. دنبالهٔ $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است:

$$a_2 = 2a_1 - a_0 + 2 \quad \text{و اگر } n \geq 2$$

$$a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}$$

اگر به ازای هر عدد طبیعی مانند m ، این دنباله شامل m جمله متوالی باشد که همه آنها مربع کامل اند، ثابت کنید هر عضو این دنباله مربع کامل است.

راه حل اول

فرض کنید $d_n = a_n - a_{n-1}$ ، $n \geq 1$. در این صورت، اگر $n \geq 2$ ، آن وقت

$$0 = a_{n+1} - 3a_n + 3a_{n-1} - a_{n-2} = d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1}$$

بنابراین، اگر $n \geq 1$

$$d_n - d_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2} = \dots = d_2 - d_1 = a_2 - 2a_1 + a_0 = 2$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{i=1}^n d_i \\ &= a_0 + nd_1 + n(n-1) \\ &= n^2 + (a_1 - a_0 - 1)n + a_0. \end{aligned}$$

بنابر فرض مسأله، عددی طبیعی مانند t وجود دارد که a_t و a_{t+2} هر دو مربع کامل اند. در نتیجه

$$a_{t+2} - a_t \neq 2 \quad (\text{ب. پیمانه } 4)$$

چون

$$a_{t+2} - a_t = 4t + 4 + 2(a_1 - a_0 - 1)$$

پس عددی صحیح مانند λ وجود دارد که $2\lambda = a_1 - a_0 - 1$ و اگر $n \geq 0$

$$a_n = (n + \lambda)^2 + a_0 - \lambda^2 \quad (*)$$

اگر $0 \neq a_0 - \lambda^2$ ، فرض کنید $a_0 - \lambda^2$ ، m مقسوم علیه داشته باشد. چون ضریب جمله درجه دوم

در سمت راست تساوی (*) مثبت است، پس عددی طبیعی مانند n_0 وجود دارد که به ازای $n \geq n_0$

$a_{n+1} > a_n$. بنابر فرض مسأله، عددی طبیعی و بزرگتر از n_0 مانند k وجود دارد که به ازای هر i ،

$1 \leq i \leq m$ ، عددی طبیعی مانند b_i وجود دارد که $a_{k+i} = b_i^2$. به این ترتیب،

$$a_0 - \lambda^2 = b_i^2 - (k + i + \lambda)^2 = (b_i - k - i - \lambda)(b_i + k + i + \lambda)$$

عدهای

$$b_i + k + i + \lambda, \quad 1 \leq i \leq m$$

متمايزند، زیرا

$$b_i + i < b_{i+1} + i + 1$$

بنابراین $a_0 - \lambda^2 = 0$ دست کم $m + 1$ مقسوم علیه دارد، که تناقض است. پس $a_0 - \lambda^2 = 0$ و

$$a_n = (n + \lambda)^2, \quad n \geq 0$$

راه حل دوم

مانند راه حل اول می توان نتیجه گرفت

$$a_n = n^2 + \mu n + a_0, \quad n \geq 0$$

که در آن $\mu = a_1 - a_0 - 1$. بنابراین

$$\begin{aligned} a_n &= \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2 + a_0 - \frac{\mu^2}{4} \\ &= \left(n + \frac{\mu + 1}{2}\right)^2 - n + a_0 - \frac{(\mu + 1)^2}{4} \\ &= \left(n + \frac{\mu - 1}{2}\right)^2 + n + a_0 - \frac{(\mu - 1)^2}{4} \end{aligned}$$

فرض کنید n_0 عددی طبیعی باشد و

$$n_0 > \max \left\{ \frac{|\mu| + 1}{2}, \frac{(|\mu| + 1)^2}{4} + |a_0| \right\}$$

اگر $n > n_0$ ، آن وقت $a_{n+1} > a_n$ و

$$\left(n + \frac{\mu - 1}{2}\right)^2 < a_n < \left(n + \frac{\mu + 1}{2}\right)^2$$

بنابر فرض مسئله، عددی طبیعی و بزرگتر از n_0 مانند t وجود دارد که به ازای عددی طبیعی مانند b ،

$$a_t = b^2 \quad \text{بنابراین}$$

$$t + \frac{\mu - 1}{2} < b < t + \frac{\mu + 1}{2}$$

در نتیجه μ باید زوج باشد و $b = t + \frac{\mu}{2}$. پس

$$a_t = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right)^2$$

در نتیجه $a_0 - \frac{\mu^2}{4} = 0$. بنابراین

$$a_n = \left(n + \frac{\mu}{2}\right)^2, \quad n \geq 0$$

هشتمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۳

مسألهٔ ۱. فرض کنید n عددی طبیعی و فرد باشد. ثابت کنید $2n$ عدد صحیح مانند $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ وجود دارند که به ازای هر عدد طبیعی مانند $k, k < n$ ، هیچ دو تایی از $3n$ عدد صحیح

$$a_i + a_{i+1}, \quad a_i + b_i, \quad a_i + b_{i+k}, \quad 1 \leq i \leq n$$

که در آنها اندیسه‌ها را به پیمانه n حساب می‌کنیم، به پیمانه $3n$ همنهشت نیستند.

راه حل

فرض کنید

$$a_i = 3i - 2, \quad b_i = 3i - 3, \quad 1 \leq i \leq n$$

در این صورت

$$\alpha_i = a_i + a_{i+1} = 6i - 1, \quad 1 \leq i \leq n$$

بنابراین

$$\alpha_j - \alpha_i = 6(j - i), \quad 1 \leq i < j \leq n$$

چون n عددی فرد است، پس (به پیمانه $3n$) $\alpha_i \not\equiv \alpha_j$. همچنین،

$$\beta_i = a_i + b_i = 6i - 5, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\gamma_i = b_i + b_{i+k} = 6i - 6 + 3k, \quad 1 \leq i \leq n$$

بنابراین

$$\beta_j - \beta_i = \epsilon(j-i) = \gamma_j - \gamma_i, \quad 1 \leq i < j \leq n$$

و مانند قبل،

$$\beta_i \not\equiv \beta_j \quad (\text{به پیمانه } 3n)$$

$$\gamma_i \not\equiv \gamma_j \quad (\text{به پیمانه } 3n)$$

از طرف دیگر،

$$\alpha_i \equiv 2 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

$$\beta_i \equiv 1 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

$$\gamma_i \equiv 0 \quad (\text{به پیمانه } 3)$$

بنابراین حکم مسأله درست است.

مسأله ۲. فرض کنید n عددی طبیعی و a عددی حقیقی و مثبت باشد. بیشترین مقدار

$$a^{k(1)} + a^{k(2)} + \dots + a^{k(s)}$$

را تعیین کنید، که در اینجا s عددی طبیعی است، $s \leq n$ و $k(1), k(2), \dots, k(s)$ و $k(s)$ عددهایی طبیعی اند که مجموعشان برابر با n است.

راه حل اول

اگر $0 < a < 1$ ، تابع a^x نزولی است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم $s = n$ و $k(i) = 1$ ، $1 \leq i \leq s$. در این صورت، بیشترین مقدار

$$a^{k(1)} + a^{k(2)} + \dots + a^{k(s)} \quad (*)$$

برابر است با na .فرض کنید $a > 1$. اگر u و v عددهایی طبیعی باشند، آنوقت

$$a(a^{u-1} - 1)(a^{v-1} - 1) \geq 0$$

و در نتیجه

$$a^u + a^v \leq a + a^{u+v-1}$$

پس باید $k(i) = 1$ ، $1 \leq i \leq s-1$. در این صورت بیشترین مقدار عبارت $(*)$ حداکثر برابر است با

$$(s-1)a + a^{n-(s-1)} \quad (**)$$

توجه کنید که اگر $m = \log_a \frac{a}{a-1}$ ، آنوقت $a + a^m = a^{m+1}$. در نتیجه، اگر

$$s \leq (n+1) - \log_a \frac{a}{a-1}$$

وقتی که مقدار s کوچک و کوچکتر می‌شود، مقدار عبارت $(**)$ هم کمتر و کمتر می‌شود، پس باید فرض کنیم $s = n$ و در این صورت بیشترین مقدار موردنظر برابر با na است. از طرف دیگر، اگر

$$s > (n+1) - \log_a \frac{a}{a-1}$$

وقتی که مقدار s بزرگ و بزرگتر می‌شود، مقدار عبارت $(**)$ کوچک و کوچکتر می‌شود. پس باید فرض کنیم $s = 1$ و بیشترین مقدار موردنظر برابر است با a^n . بنابراین، بیشترین مقدار عبارت $(**)$ و نیز عبارت $(*)$ برابر است با $\max\{na, a^n\}$. اگر $n = 1$ ، آن وقت $na = a^n$. فرض کنید $n \geq 2$. در این صورت، اگر $a = n^{\frac{1}{n-1}}$ ، آن وقت $na = a^n$. بنابراین اگر $a \leq n^{\frac{1}{n-1}}$ ، بیشترین مقدار عبارت $(*)$ برابر na است و اگر $a > n^{\frac{1}{n-1}}$ ، بیشترین مقدار عبارت $(*)$ برابر با a^n است.

راه حل دوم

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که بیشترین مقدار عبارت $(*)$ برابر است با $\max\{na, a^n\}$. اگر $n = 1$ ، حکم درست است. فرض کنید که حکم به‌ازای عدد طبیعی n درست باشد. فرض کنید

$$k(1) + k(2) + \dots + k(s) = n + 1$$

چون $n + 1 - k(1) \leq n$ ، از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$a^{k(2)} + a^{k(3)} + \dots + a^{k(s)} \leq \max\left\{(n+1-k(1))a, a^{n+1-k(1)}\right\}$$

پس بیشترین مقدار عبارت $(*)$ حداکثر برابر است با

$$\max\left\{a^{k(1)} + (n+1-k(1))a, a^{k(1)} + a^{n+1-k(n)}\right\}$$

تابعهای $a^x + (n+1-x)a$ و $a^x + a^{n+1-x}$ هر دو محدب‌اند. بنابراین بیشترین مقدار هر یک از آنها در نقاط انتهایی دامنه تعریفشان به‌دست می‌آید. در نتیجه

$$a^{k(1)} + (n+1-k(1))a \leq \max\left\{(n+1)a, a^{n+1}\right\}$$

$$a^{k(1)} + a^{n+1-k(1)} \leq a + a^n \leq \max\left\{(n+1)a, a^{n+1}\right\}$$

نابرابری آخر به این دلیل درست است که اگر $k(1) = n$ ، آن وقت

$$a^{k(1)} + (n+1-k(1))a = a^n + a$$

اکنون می‌توانید مانند راه‌حل اول استدلال کنید.

مسأله ۳. شعاعهای دو دایره هم مرکز برابر با R و R_1 است و $R_1 > R$. چهارضلعی $ABCD$ در دایره کوچکتر و چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ در دایره بزرگتر محاط شده است و A_1 بر امتداد CD ، B_1 بر امتداد DA ، C_1 بر امتداد AB و D_1 بر امتداد BC قرار دارد. ثابت کنید

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_1^2}{R^2}$$

راه حل

فرض کنید

$$\begin{aligned} a &= AB, & b &= BC, & c &= CD, & d &= DA \\ w &= A_1D, & x &= B_1A, & y &= C_1B, & z &= D_1C \end{aligned}$$

در این صورت

$$x(x+d) = y(y+a) = z(z+b) = w(w+c) = R_1^2 - R^2$$

چون

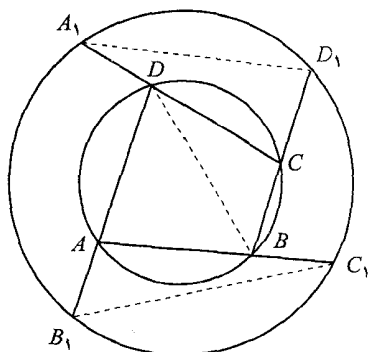
$$\angle B_1AC_1 = 180^\circ - \angle DAB = \angle BDC = 180^\circ - \angle A_1CD_1$$

پس

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABCD}} = \frac{x(a+y)}{ad+bc}, \quad \frac{S_{A_1CD_1}}{S_{ABCD}} = \frac{z(c+w)}{ad+bc}$$

به همین ترتیب معلوم می شود که

$$\frac{S_{BC_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{y(b+z)}{ab+cd}, \quad \frac{S_{A_1B_1D}}{S_{ABCD}} = \frac{w(d+x)}{ab+cd}$$



$$\begin{aligned} \frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} &= 1 + \frac{x(a+y) + z(c+w)}{ad+bc} + \frac{y(b+z) + w(d+x)}{ab+cd} \\ &= 1 + (R_1^2 - R^2) \left(\frac{x}{y(ad+bc)} + \frac{z}{w(ad+bc)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{y}{z(ab+cd)} + \frac{w}{x(ab+cd)} \right) \\ &\geq 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}} \end{aligned}$$

(در نابرابری آخر از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کرده‌ایم.) همچنین،

$$\begin{aligned} 2\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)} &\leq (ad+bc) + (ab+cd) = (a+c)(b+d) \\ &\leq \frac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \leq 4R^2 \end{aligned}$$

که در آخرین نابرابری از این نکته استفاده کرده‌ایم که در میان همه چهارضلعیهای محاط در یک دایره، مربع بیشترین محیط را دارد. بنابراین

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{4(R_1^2 - R^2)}{4R^2} = \frac{R_1^2}{R^2}$$

مسأله ۴. فرض کنید S مجموعه‌ای از ۱۹۹۳ بردار غیرصفر در صفحه باشد. ثابت کنید گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی S وجود دارد که ویژگیهای زیر را دارند:

۱. هر بردار S متعلق به دقیقاً یکی از این زیرمجموعه‌هاست.

۲. زاویه میان هر بردار در هر زیرمجموعه و بردار برآیند این زیرمجموعه حداکثر برابر با 90° است.

۳. زاویه میان برآیندهای هر دو زیرمجموعه از 90° بیشتر است.

راه حل

چون تعداد زیرمجموعه‌های ناتهی S متناهی است، زیرمجموعه‌ای مانند A وجود دارد که طول بردار برآیندش، که آن را a می‌نامیم، بیشترین مقدار ممکن باشد. به‌ازای هر بردار مانند v در A ، اگر زاویه میان a و v از 90° بیشتر باشد، آن وقت طول برآیند $\{v\} - A$ بیشتر است. بنابراین A ویژگی ۲ را دارد. اگر $A = S$ ، گردایه موردنظر فقط از A تشکیل می‌شود و ویژگیهای ۱ و ۳ را هم دارد. فرض کنید $A \neq S$. از میان همه زیرمجموعه‌های ناتهی $S - A$ زیرمجموعه‌ای مانند B انتخاب کنید که طول برآیندش، که آن را b می‌نامیم، بیشترین مقدار ممکن باشد. به همان دلیل که A ویژگی ۲ را دارد، B هم این ویژگی را دارد. به‌ازای هر v در B ، زاویه میان a و v از 90° بیشتر است، زیرا در غیر این

صورت طول برآیند $\{v\} \cup A$ بیشتر خواهد شد. پس A و B ویژگی ۳ را دارند. اگر $A \cup B = S$ ، گردایه مطلوب از A و B تشکیل می‌شود. فرض کنید $C = S - (A \cup B) \neq \emptyset$. ثابت می‌کنیم گردایه مورد نظر از A ، B و C تشکیل می‌شود. مانند قبل، اگر v در C باشد، زاویه میان a و v و زاویه میان b و v از 90° بیشتر است. اگر c برآیند C باشد، زاویه میان a و c و زاویه میان b و c هم از 90° بیشتر است. بنابراین گردایه مورد نظر ویژگی ۳ را دارد. به ازای هر v در C ، اگر زاویه میان v و c از 90° بیشتر باشد، زاویه میان v و هر یک از a ، b و c منفرجه می‌شود که ممکن نیست. بنابراین C ویژگی ۲ را دارد و حکم را ثابت کرده‌ایم.

مسأله ۵. ده نفر رفته‌اند کتاب بخرند. می‌دانیم

۱. هر یک از آنها سه کتاب مختلف خریده است.

۲. هر دو تا از آنها دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند.

کتابی را در نظر بگیرید که تعداد بیشتری از این ده نفر آن را خریده‌اند. کمترین مقدار این بیشترین تعداد چقدر است؟

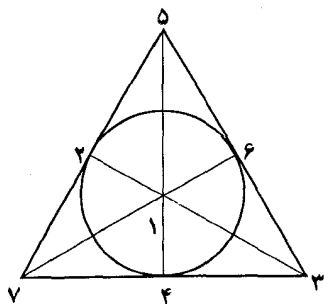
راه حل اول

فرض کنید هفت کتاب مختلف خریده شده است و آنها را از ۱ تا ۷ شماره‌گذاری کنید. این ده نفر ممکن است کتابهای زیر را خریده باشند:

$$(1, 2, 3), (1, 4, 5), (1, 6, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 7)$$

$$(2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6), (3, 5, 6)$$

از روی شکل ۱۶ معلوم است که هر دو نفر دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند. هر کتاب را حداکثر پنج نفر خریده‌اند. فرض کنید A یکی از این ده نفر باشد. هر یک از نه نفر دیگر دست‌کم یک کتاب مثل سه کتاب A خریده است. در نتیجه، بنابراین اصل لانه کبوتری، دست‌کم یک کتاب را دست‌کم سه نفر دیگر



شکل ۱۶

بجز A خریده‌اند. بنابراین کمترین مقدار موردنظر دست‌کم ۴ است. اگر این مقدار برابر با ۴ باشد، بنا بر تقارن، هر کتاب را دقیقاً چهار نفر خریده‌اند. اما کلاً ۳۰ کتاب فروخته شده است، و چون ۳۰ بر ۴ بخش‌پذیر نیست، پس کمترین مقدار موردنظر ۵ است.

راه حل دوم

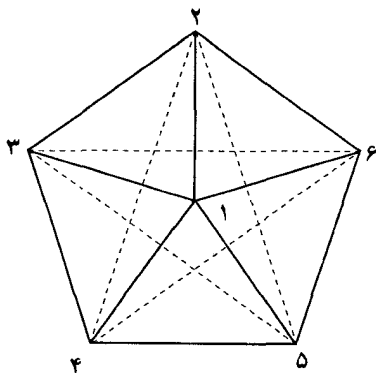
فرض کنید شش کتاب مختلف خریده شده است و آنها را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کنید. این ده نفر ممکن است کتابهای زیر را خریده باشند:

$$(1, 2, 3), (1, 3, 4), (1, 4, 5), (1, 5, 6), (1, 6, 2)$$

$$(2, 3, 5), (3, 4, 6), (4, 5, 2), (5, 6, 3), (6, 2, 4)$$

از روی شکل ۱۷ معلوم است که هر دو نفر دست‌کم یک کتاب مثل هم خریده‌اند. هر کتاب را دقیقاً پنج نفر خریده‌اند. فرض کنید که هر کتاب را حداکثر چهار نفر خریده باشند. فرض کنید n کتاب مختلف خریده شده باشد و هر یک از آنها را به ترتیب m_i نفر خریده باشند، $1 \leq i \leq n$. اگر x و y هر دو کتاب b را خریده باشند، (x, y, b) را جفت می‌نامیم. هر دو نفر دست‌کم در یک جفت قرار دارند و کتاب i ام در دقیقاً (m_i) جفت آمده است. بنابراین

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + \dots + \binom{m_n}{2} \leq 7 \binom{10}{2} = 45$$



شکل ۱۷

توجه کنید که

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 30$$

$$\binom{4}{2} = 6, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{2}{2} = 1, \quad \binom{1}{2} = 0$$

بنابراین، برای اینکه مقدار

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + \dots + \binom{m_n}{2}$$

بیشترین مقدار ممکن شود، باید تعداد حالتی که $m_i = 4$ بیشترین تعداد ممکن باشد. بنابراین

$$\binom{m_1}{2} + \binom{m_2}{2} + \dots + \binom{m_n}{2} \leq 7 \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 43$$

که تناقض است. بنابراین کمترین مقدار موردنظر برابر با ۵ است.

مسأله ۶. فرض کنید f تابعی از مجموعه عددهای حقیقی و مثبت به همین مجموعه باشد، به طوری که به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت مانند x و y

$$f(xy) \leq f(x)f(y)$$

ثابت کنید به ازای هر عدد حقیقی و مثبت مانند x و هر عدد طبیعی مانند n

$$f(x^n) \leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \dots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

راه حل

فرض کنید

$$F_n(x) = f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \dots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم $F_n(x) \geq f(x^n)$. اگر $n = 1$ ، باید ثابت کنیم $f(x) \leq f(x)$ که درست است. فرض کنید حکم به ازای عدد طبیعی n درست باشد. در این صورت

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x)^{n+1} &= F_n(x)^{n+1} f(x^{n+1}) \\ &= F_n(x)^n f(x^{n+1}) F_n(x) \\ &= F_{n-1}(x)^n f(x^n) f(x^{n+1}) F_n(x) \\ &= F_{n-1}(x)^{n-1} f(x^n) f(x^{n+1}) F_n(x) F_{n-1}(x) \\ &\vdots \\ &= f(x) f(x^2) \dots f(x^{n+1}) F_n(x) F_{n-1}(x) \dots F_1(x) \\ &\geq f(x) f(x^2) \dots f(x^{n+1}) f(x^n) f(x^{n-1}) \dots f(x) \\ &\geq f(x^{n+1})^{n+1} \end{aligned}$$

در نتیجه $F_{n+1}(x) \geq f(x^{n+1})$

نهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۴

مسألهٔ ۱. الف) فرض کنید $ABCD$ دوزنقه‌ای باشد که در آن AB و CD موازی اند. فرض کنید E و F نقطه‌هایی به ترتیب روی AB و CD باشند. اگر CE ، BF را در نقطهٔ H و ED ، AF را در نقطهٔ G قطع کند، ثابت کنید مساحت $EGFH$ حداکثر $\frac{1}{4}$ مساحت $ABCD$ است.

ب) اگر $ABCD$ چهارضلعی محدب دلخواهی باشد، آیا حکم قسمت (الف) باز هم درست است؟

راه حل

الف) فرض کنید H_1 و H_2 پای عمودهای مرسوم از G به ترتیب بر AB و CD باشند. در این صورت، چون مثلثهای AEG و DFG متشابه‌اند، یا $AE \geq DF$ و $GH_1 \geq GH_2$ ، یا $AE < DF$ و $GH_1 < GH_2$. پس بنابر نابرابری چیشف،

$$\begin{aligned} S_{AEG} + S_{DFG} &= \frac{1}{2} (AE \times GH_1 + DF \times GH_2) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} (AE + DF)(GH_1 + GH_2) \right) \\ &= \frac{1}{4} S_{AEFD} \end{aligned}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$S_{BEH} + S_{CFH} \geq \frac{1}{4} S_{BEFC}$$

به این ترتیب

$$S_{AEG} + S_{DFG} + S_{BEH} + S_{CFH} \geq \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

اکنون توجه کنید که

$$S_{AFB} + S_{CED} = S_{ABCD}$$

بنابراین

$$2S_{EGFH} + S_{AEG} + S_{DFG} + S_{BEH} + S_{CFH} = S_{ABCD}$$

درنتیجه

$$S_{ABCD} - 2S_{EGFH} \geq \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

و

$$S_{ABCD} \geq \frac{1}{4} S_{EGFH}$$

ب) اگر AB با CD موازی نباشد، می‌توانیم ABD را مثلثی متساوی‌الاضلاع انتخاب کنیم و C را نزدیک B ، E را نزدیک A و F را نزدیک D انتخاب کنیم. در این صورت مساحت $EGFH$ با مساحت $ABCD$ تقریباً برابر است و حکم قسمت (الف) دیگر درست نیست.

مسئله ۲. دست کم چهار شکلات در n ظرف گذاشته‌ایم ($n \geq 4$). در هر حرکت دو ظرف غیر خالی را انتخاب می‌کنیم، از هر کدام شکلاتی برمی‌داریم و این دو شکلات را در ظرفی دیگر می‌گذاریم. آیا می‌توانیم چندبار (متناهی) این حرکت را انجام دهیم و همه شکلاتها را در یک ظرف قرار دهیم؟

راه حل

ثابت می‌کنیم که می‌توانیم همه شکلاتها را در یک ظرف جمع کنیم. این حکم را به استقرا روی تعداد شکلاتها ثابت می‌کنیم. فرض کنید کلاً m شکلات داریم. اگر $m = 4$ ، حداکثر چهار ظرف غیر خالی وجود دارد. ظرفهای خالی را در نظر نمی‌گیریم و همه حالت‌های ممکن توزیع شکلاتها را بررسی می‌کنیم:

(ب) $(1, 2, 1, 0)$

(الف) $(1, 1, 1, 1)$

(د) $(1, 3, 0, 0)$

(ج) $(2, 2, 0, 0)$

در حالت (الف) حرکت‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (3, 1, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 2, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 4)$$

بقیه حالتها را هم می‌توان به همین ترتیب بررسی کرد.

اکنون فرض کنید حکم در مورد عدد طبیعی m ، $m \geq 4$ ، درست باشد. فرض کنید $m+1$ شکلات داشته باشیم. یکی از آنها را خوشمزه می‌نامیم و در ابتدا آن را کنار می‌گذاریم و m شکلات

باقی مانده را در نظر می گیریم. بنابر فرض استقرا می توانیم این m شکلات را در یک ظرف جمع کنیم اگر این ظرف همان ظرفی باشد که خوشمزه در آن قرار دارد که حکم را ثابت کرده ایم. در غیر این صورت، دو ظرف خالی انتخاب می کنیم و مانند زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} (1, m, 0, 0) &\rightarrow (0, m-1, 2, 0) \rightarrow (0, m-2, 1, 2) \\ &\rightarrow (2, m-3, 0, 2) \rightarrow (1, m-1, 0, 1) \rightarrow (0, m+1, 0, 0) \end{aligned}$$

بنابراین باز هم همه شکلاتها در یک ظرف جمع می شوند.

مسأله ۳. همه تابعها مانند $f: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$ را پیدا کنید که به ازای هر x در بازه $[1, +\infty)$,

$$f(x) \leq 2(x+1)$$

و

$$f(x+1) = \frac{1}{x} \left((f(x))^2 - 1 \right)$$

راه حل

فرض کنید تابع f ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. در این صورت

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \leq x(2(x+2)) + 1 \leq 2(x+1)^2$$

بنابراین

$$f(x) \leq \sqrt{2}(x+1)$$

مانند قبل، می توان نتیجه گرفت که به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، $k \geq 2$

$$f(x) \leq 2^{\frac{1}{k}}(x+1)$$

بنابراین $f(x) \leq x+1$.

اکنون فرض کنید x_0 عددی در بازه $[1, +\infty)$ باشد و $x_0 + 1 < f(x_0)$ در این صورت عددی مثبت مانند r وجود دارد که

$$f(x_0) < x_0 + 1 - r$$

بنابراین

$$\begin{aligned} f(x_0 + 1) &= \frac{1}{x_0} \left((f(x_0))^2 - 1 \right) \\ &< \frac{1}{x_0} \left((x_0 + 1 - r)^2 - 1 \right) \\ &= (x_0 + 1) + 1 - 2r - \frac{r^2}{x_0} + \frac{r^2}{x_0} \end{aligned} \quad (*)$$

اگر $r \leq \frac{x_0}{\frac{3}{2}}$ آن وقت

$$2r + \frac{2r}{x_0} - \frac{r^2}{x_0} \geq 2r + \frac{2r}{x_0} - \frac{r}{\frac{3}{2}} > \frac{3}{2}r$$

و در نتیجه

$$f(x_0 + 1) < (x_0 + 1) + 1 - \frac{3}{2}r$$

به همین ترتیب می توان نتیجه گرفت

$$f(x_0 + m) < (x_0 + m) + 1 - \left(\frac{3}{2}\right)^m r$$

چون $\left(\frac{3}{2}\right)^m$ سریعتر از m به بینهایت میل می کند، می توانیم m را آنقدر بزرگ انتخاب کنیم که

$$x_0 + m < \left(\frac{3}{2}\right)^m r$$

و در نتیجه

$$f(x_0 + m) < 1$$

که تناقض است. بنابراین

$$f(x) = x + 1$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که تابع $f(x) = x + 1$ ویژگیهای موردنظر ما را دارد.

مسأله ۴. ثابت کنید به ازای هر چند جمله ای با ضریبهای مختلط مانند

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_{n-1} z + c_n$$

عددی مختلط مانند z_0 وجود دارد که $|z_0| \leq 1$ و

$$|f(z_0)| \geq |c_0| + |c_n|$$

راه حل

می توانیم فرض کنیم $c_0 \neq 0$. فرض کنید

$$\frac{f(z)}{c_0} = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

فرض کنید $a_n \neq 0$ و چند جمله ای

$$\frac{f(z)}{c_0} - a_n - \frac{a_n}{|a_n|}$$

را در نظر بگیرید. حاصل ضرب ریشه‌های این چندجمله‌ای برابر است با $\frac{a_n}{|a_n|}(-1)^{n+1}$. پس قدرمطلق حاصل ضرب این ریشه‌ها برابر با ۱ است و در نتیجه، این چندجمله‌ای ریشه‌ای مانند z دارد که $|z_0| \leq 1$ به این ترتیب

$$\left| \frac{f(z_0)}{c_0} \right| = a_n \left(1 + \frac{1}{|a_n|} \right)$$

و در نتیجه

$$\left| \frac{f(z_0)}{c_0} \right| = |a_n| \left(1 + \frac{1}{|a_n|} \right) = 1 + |a_n|$$

بنابراین

$$f(z_0) = |c_0| + |c_n|$$

اگر $a_n = 0$ ، چندجمله‌ای $\frac{f(z)}{c_0} - 1$ را در نظر بگیرید. مانند قبل، این چندجمله‌ای ریشه‌ای مانند z دارد که $|z_0| \leq 1$ در این صورت،

$$\left| \frac{f(z_0)}{c_0} \right| = 1$$

و در نتیجه

$$|f(z_0)| = |c_0| + |c_n|$$

مسأله ۵. ثابت کنید که به ازای هر عدد طبیعی مانند n

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

راه حل

سمت راست تساوی مورد نظر تعداد راه‌های انتخاب n شیء از میان $2n+1$ شیء است. ثابت می‌کنیم سمت چپ این تساوی نیز همین تعداد است. $2n+1$ شیء را به n زوج و یک تک شیء تقسیم کنید. به ازای هر عدد طبیعی مانند k ، $k \leq n$ ، دقیقاً k زوج و از هر کدام دقیقاً یک شیء انتخاب می‌کنیم. برای انتخاب k شیء $\binom{n}{k}$ راه و برای انتخاب اشیای این زوجها 2^k راه وجود دارد. اکنون $\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ تا از $n-k$ زوج باقی‌مانده را انتخاب می‌کنیم و هر دو شیء هریک از آنها را برمی‌داریم. به این ترتیب $\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor + k$ شیء انتخاب کرده‌ایم. اگر $n-k$ عددی فرد باشد، کلاً $n-1$ شیء انتخاب کرده‌ایم و تک شیء را هم انتخاب می‌کنیم. اگر $n-k$ عددی زوج باشد، کلاً n شیء انتخاب کرده‌ایم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که وقتی k از ۱ تا n تغییر می‌کند، همه راه‌های ممکن برای انتخاب n

شیء را به دست آورده‌ایم. بنابراین تعداد راههای انتخاب n شیء از $2n + 1$ شیء برابر است با

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$$

در نتیجه

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

مسأله ۶. فرض کنید M نقطه‌ای به مختصات $(1994p, 7 \times 1994p)$ باشد، که در آن p عددی اول است. تعداد مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را پیدا کنید که رأس زاویه قائمه آنها در نقطه M است، مختصات رأسهای دیگرشان عددهایی صحیح‌اند و مرکز دایره محاطی آنها مبدأ مختصات است.

راه حل

فرض کنید مثلث MNP ویژگیهای موردنظر را داشته باشد و $u = 1994p$. در این صورت، اگر مختصات N ، (x, y) و شیب پاره‌خط MN برابر با k باشد، معادله خطی که این پاره‌خط روی آن قرار دارد

$$y - 7u - k(x - u) = 0$$

است. فاصله مبدأ تا این خط برابر است با

$$\frac{|7u - ku|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

از طرف دیگر، پاره‌خط MP بر پاره‌خط MN عمود است و در نتیجه، معادله خطی که این پاره‌خط روی آن قرار دارد

$$k(y - 7u) + x - u = 0$$

است. فاصله مبدأ تا این خط برابر است با

$$\frac{|u + 7ku|}{\sqrt{1 + k^2}}$$

چون مبدأ مختصات مرکز دایره محاطی مثلث MNP است، پس فاصله آن از ضلعهای MP و MN برابر است، یعنی

$$|7u - ku| = |u + 7ku|$$

بنابراین یا $k = \frac{3}{4}$ یا $k = -\frac{4}{3}$. چون حاصل ضرب این دو مقدار برای k برابر با -1 است، این دو

در حقیقت یک جواب‌بند. بنابراین شیب یکی از ضلعها $\frac{3}{4}$ و شیب ضلع دیگر $\frac{4}{3} -$ است. پس شعاع دایره محاطی مثلث MNP برابر با $5u$ است.

می‌توانیم فرض کنیم N و P نقطه‌های $(u + 3n, 4u - 4n)$ و $(u - 4m, 4u - 3m)$ هستند، که در آنها m و n عددهایی صحیح‌اند. پس معادله خطی که NP روی آن قرار دارد

$$(3n + 4m)y + (4n - 3m)x - 25(mu + nu - mn) = 0$$

است. فاصله مبدأ تا این خط برابر است با

$$\frac{25|mu + nu - mn|}{\sqrt{(3n + 4m)^2 + (4n - 3m)^2}}$$

یا

$$\frac{5|mu + nu - mn|}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

این فاصله برابر است با $5u$ و در نتیجه

$$u^2(m^2 + n^2) = (mu + nu - mn)^2$$

یا

$$2u^2 - 2(m + n)u + mn = 0 \quad (*)$$

محل تماس دایره محاطی مثلث با ضلع MN نقطه $(4u, 3u)$ است، پس فاصله N تا این نقطه از فاصله M تا این نقطه بیشتر است. بنابراین $n > 2u$. به همین ترتیب معلوم می‌شود که دایره محاطی مثلث در نقطه $(-3u, 4u)$ بر ضلع NP مماس است و فاصله P تا این نقطه از فاصله M تا این نقطه بیشتر است. بنابراین $m > 2u$. فرض کنید

$$m = 2u + r, \quad n = 2u + s$$

در این صورت از تساوی $(*)$ نتیجه می‌شود $rs = 2u^2$ از طرف دیگر،

$$2u^2 = 2^3 \times 997^2 \times p^2$$

پس اگر $p = 2$ ، تعداد مقسوم‌علیه‌های $2u^2$ برابر با ۱۸ است و اگر $p = 997$ ، تعداد مقسوم‌علیه‌های $2u^2$ برابر با ۲۰ است و در بقیه موارد تعداد مقسوم‌علیه‌های $2u^2$ برابر با ۳۶ است.

دهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۵

مسأله ۱. فرض کنید $2n$ عدد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ و $(n \geq 3)$ در شرطهای زیر صدق می‌کنند:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad (\text{الف})$$

$$a_1 = a_2 < 0 \text{ و } a_i + a_{i+1} = a_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (\text{ب})$$

$$b_1 \leq b_2 < 0 \text{ و } b_i + b_{i+1} \leq b_{i+2}, \quad i = 1, 2, \dots, n-2 \quad (\text{ج})$$

ثابت کنید

$$a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$$

راه حل

فرض کنید F_n ، n امین عدد فیبوناتچی باشد (که در آن $F_0 = 0$ و $F_1 = 1$). در این صورت

$$a_i = F_i a_1, \quad \text{فرض کنید } d_2 = b_2 - b_1 \text{ و به ازای } i > 2$$

$$d_i = b_i - b_{i-1} - b_{i-2}$$

در این صورت به سادگی معلوم می‌شود که

$$b_i = F_{i-1} d_2 + \dots + F_1 d_i + F_i b_1$$

همچنین به استقرا معلوم می‌شود که

$$F_1 + \dots + F_k = F_{k+2} - 1$$

به این ترتیب

$$\frac{b_{n-1} + b_n}{b_1 + \dots + b_{n-2}} = \frac{F_n d_2 + \dots + F_2 d_n + F_{n+1} b_1}{(F_{n-1} - 1)d_2 + \dots + (F_1 - 1)d_n + (F_n - 1)b_1}$$

$$\geq \frac{F_{n+1} b_1}{(F_n - 1)b_1} = \frac{a_{n-1} + a_n}{a_1 + \dots + a_{n-2}}$$

در اینجا از این نکته استفاده کرده‌ایم که اگر b و d مثبت باشند و $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ، آنگاه

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d}$$

فرض کنید $s = a_1 + \dots + a_n$. در این صورت، درحقیقت ثابت کرده‌ایم که

$$\frac{a_{n-1} + a_n}{s - a_{n-1} - a_n} \leq \frac{b_{n-1} + b_n}{s - b_{n-1} - b_n}$$

چون تابع $f(x) = \frac{x}{s-x}$ روی بازه $[0, s]$ صعودی است، از این نابرابری نتیجه می‌شود

$$a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$$

مسأله ۲. دربارهٔ تابع $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ می‌دانیم $f(1) = 1$ و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ،

$$3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1+3f(n)) \quad (\text{الف})$$

$$f(2n) < 6f(n) \quad (\text{ب})$$

همهٔ جوابهای معادلهٔ $f(k) + f(l) = 293$ ، $k < l$ ، را پیدا کنید.

راه‌حل

بنابر شرط (الف)، $3f(n)$ ، $f(2n)$ ، $f(2n+1)$ و $1+3f(n)$ را می‌شمارد. از طرف دیگر، $3f(n)$ و $1+3f(n)$

نسبت به هم اول‌اند؛ پس $3f(n)$ ، $f(2n)$ را می‌شمارد. بنابراین $\frac{f(2n)}{3f(n)}$ عددی طبیعی است و چون

بنابر شرط (ب) از ۲ کوچکتر است، پس درحقیقت $f(2n) = 3f(n)$ و درنتیجه به‌ازای هر عدد

طبیعی مانند n

$$f(2n+1) = 1 + 3f(n)$$

با استفاده از این تساویها به‌سادگی می‌توان به استقرا ثابت کرد که اگر

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_k}$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_k$ متمایزند، آنگاه

$$f(n) = 3^{a_0} + 3^{a_1} + \dots + 3^{a_k}$$

بنابراین، برای حل کردن معادله $f(k) + f(l) = 293$ باید عدددهایی را پیدا کنیم که مجموعشان ۲۹۳ است و بسط آنها در مبنای ۳ فقط شامل رقمهای ۰ و ۱ است. چون $293 = (101212)_3$ ، پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} 293 &= (101)_3 + (101111)_3 \\ &= (111)_3 + (101101)_3 \\ &= (1101)_3 + (100111)_3 \\ &= (1111)_3 + (100101)_3 \end{aligned}$$

اگر این جوابها را در مبنای ۳ بنویسیم جوابهای موردنظر به دست می‌آیند، یعنی

$$(k, l) = (5, 47), (7, 45), (13, 39), (15, 37)$$

مسألهٔ ۳. کمترین مقدار عبارت

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} |k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

را پیدا کنید، که در آن x و y عدددهایی حقیقی‌اند.

راه حل

مجموع موردنظر را می‌توان به شکل

$$\sum_{i=1}^{10} |x+y-10i| \sum_{j=1}^{10} |3x-6y-36j| \sum_{k=1}^{10} |k(19x+95y-95k)|$$

نوشت. توجه کنید که کمترین مقدار تابعی به شکل

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \dots + |x-a_{2n}|$$

که در آن $a_1 < a_2 < \dots < a_{2n}$ به ازای هر x از بازهٔ $[a_n, a_{n+1}]$ به دست می‌آید (این تابع قطعه به قطعه خطی است و شیب آن در راسی غیرانتهایی مانند x برابر است با $2n - 2m$ ، که در آن m بزرگترین عدد صحیحی است که $a_m < x$). بنابراین در حاصل ضرب بالا، مجموع اول به ازای $50 \leq x+y \leq 60$ و مجموع دوم به ازای $216 < 3x-6y < 180$ کمترین مقدار ممکن است.

برای به دست آوردن کمترین مقدار مجموع سوم، دوباره هر جمله را تابعی بر حسب $19x + 95y = t$ در نظر بگیرید و شبیهها را حساب کنید. شیب تا $t = 95$ برابر است با $10 - 9 - 8 - 7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1$ و در این نقطه -1 تبدیل به $+1$ می شود. سپس در $t = 95 \times 2$ ، -2 تبدیل به $+2$ می شود و همین طور تا آخر. جایی که شیب از منفی به مثبت تبدیل می شود $t = 95 \times 7$ است. پیش از این نقطه شیب برابر با

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 - 7 - 8 - 9 - 10$$

یا -13 است و پس از این نقطه شیب برابر با

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 - 8 - 9 - 10$$

یا $+1$ است.

اگر همزمان نامعادله های $50 \leq x + y \leq 60$ و $3x - 6y \leq 216$ و $180 \leq$ و معادله

$$19x + 95y = 7 \times 95$$

را حل کنیم، جواب باید نقطه ای باشد که کمترین مقدار عبارت مورد نظر به دست می آید. از معادله و نامعادله اول به دست می آید $53/75 \leq x \leq 66/25$. از معادله و نامعادله دوم به دست می آید $52/857 \leq x \leq 61/428$. چون این نامعادله ها جواب مشترک دارند، پس کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر با حاصل ضرب کمترین مقدارهای سه مجموع مورد نظر است. کمترین مقدار این مجموعها به ترتیب برابر است با 250 ، 900 و 10640 که حاصل ضربشان برابر است با 2394000000 .

مسأله ۴. شعاعهای چهار گلوله به ترتیب 2 ، 2 ، 3 و 3 است. هر گلوله بر سه تایی دیگر مماس است. گلوله کوچک دیگری بر هر یک از این چهار گلوله مماس است. شعاع این گلوله چقدر است؟

راه حل

فرض کنید A و B مرکز گلوله های به شعاع 2 و C و D مرکز گلوله های به شعاع 3 باشند، O مرکز گلوله دیگر باشد و M و N به ترتیب وسط AB و CD باشند. در این صورت، بنابر تقارن، O روی صفحه های عمود منصف AB و CD قرار دارد، که این صفحه ها هم یکدیگر را در خط MN قطع می کنند. چون $AC = AD = 5$ ، پس AN بر CD عمود است و در نتیجه

$$AN^2 = AD^2 - DN^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$$

به همین ترتیب معلوم می شود $BN^2 = 4^2$. همچنین، MN بر AB عمود است (زیرا صفحه CDM بر AB عمود است) و در نتیجه

$$MN^2 = AN^2 - AM^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

فرض کنید r شعاع گلوله کوچکتر باشد. در این صورت

$$MO^2 = (r + 2)^2 - 2^2 = r^2 + 4r$$

$$NO^2 = (r + 3)^2 - 3^2 = r^2 + 6r$$

اکنون توجه کنید که $MO + NO = MN$ پس

$$\sqrt{r^2 + 4r} + \sqrt{r^2 + 6r} = \sqrt{12}$$

به سادگی می توان این معادله را حل کرد و نتیجه گرفت $r = \frac{6}{11}$

مسأله ۵. فرض کنید $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ و a_{10} عددهایی طبیعی و متمایز باشند که مجموعشان ۱۹۹۵ است. کمترین مقدار عبارت

$$a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_9 a_{10} + a_{10} + a_1$$

چقدر است؟

راه حل

کمترین مقدار عبارت مورد نظر برابر با ۴۰۶۹ است و وقتی به دست می آید که

$$(a_1, \dots, a_{10}) = (1950, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5)$$

این مطلب را به این ترتیب ثابت می کنیم که ابتدا آرایشی دلخواه در نظر می گیریم و آن را در چند گام بدون اینکه مقدار عبارت مورد نظر کمتر بشود به شکل مورد نظر درمی آوریم. ابتدا توجه کنید که می توانیم فرض کنیم a_1 بزرگترین a_i هاست، زیرا اگر $a_i > a_1$ ، می توانیم

$$a_1, \dots, a_i$$

را با

$$a_i, \dots, a_1$$

جایگزین کنیم، و به این ترتیب مجموع مورد نظر به اندازه $(a_i - a_1)(a_{i+1} - 1)$ کم می شود.

به همین ترتیب می توانیم ثابت کنیم که اگر ترتیب جمله های میان جمله دوم و کوچکترین جمله را برعکس کنیم، مقدار عبارت مورد نظر زیاد نمی شود. بنابراین می توانیم فرض کنیم a_2 کوچکترین عدد در میان a_i هاست.

معلوم است که $a_1 \leq 1950$ ، زیرا

$$a_2 + \dots + a_{10} \geq 1 + \dots + 9 = 45$$

اگر $a_1 < 1950$ ، آن وقت عددهای $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ متوالی نیستند. در نتیجه می‌توانیم یکی از a_i ها را یکی کم کنیم و باز هم همگی مثبت و متمایز باقی می‌مانند. فرض کنید a_k این ویژگی را داشته باشد. در عبارت موردنظر a_1 در a_2 ضرب می‌شود و a_k در عددی طبیعی و بزرگتر از a_2 ضرب می‌شود (این عدد طبیعی را M می‌نامیم). اگر $k = 10$ ، $M = a_9 + 1$ و در غیر این صورت $M = a_{k-1} + a_{k+1}$. در هر دو حالت، چون a_2 کوچکترین a_i هاست، $M > a_2$. بنابراین، اگر a_1 را با $1 + a_1$ و a_k را با $a_k - 1$ جایگزین کنیم، مقدار عبارت موردنظر به اندازه عدد مثبت $M - a_2$ کم می‌شود.

پس $a_1 = 1950$ و $a_2, \dots, a_{10}$ باید به ترتیبی یکی از عددهای $1, \dots, 9$ باشند. علاوه بر این، چون a_2 کوچکترین a_i هاست، پس $a_2 = 1$. اکنون می‌توانیم روند معکوس کردن را تکرار کنیم و نتیجه بگیریم که $a_3, \dots, a_{10}$ باید به همان ترتیبی باشند که در ابتدای راه حل گفتیم.

مسئله ۶. فرض کنید n عددی فرد و بزرگتر از ۱ باشد و

$$X_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = (1, 0, \dots, 0, 1)$$

فرض کنید، به ازای $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & x_i^{(k-1)} = x_{i+1}^{(k-1)} \\ 1 & x_i^{(k-1)} \neq x_{i+1}^{(k-1)} \end{cases}$$

که در آن

$$x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}$$

فرض کنید

$$X_n = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad k = 1, 2, \dots$$

ثابت کنید اگر m عددی طبیعی باشد و $X_m = X_n$ ، آن وقت m مضرب n است.

راه حل

اگر (به پیمانه n) $i \equiv j$ ، به طور کلی می‌نویسیم $x_i^{(k)} = x_j^{(k)}$. فرض کنید T تبدیلی باشد که $(x_1, \dots, x_n)$ را به

$$(x_1 + x_2, \dots, x_n + x_1)$$

می‌برد، که در آن مجموعه‌ها به پیمانه ۲ هستند. در این صورت اگر v و w بردار باشند، $T(v) = T(w)$ اگر و فقط اگر v و w برابر باشند یا v و w متمم باشند. علاوه بر این، برداری در تصویر T قرار دارد

اگر و فقط اگر تعداد زوجی ۱ داشته باشد (معلوم است که چنین شرطی لازم است و چون T دو به یک است، پس هر چنین برداری در تصویر T قرار دارد). بنابر تعریف $X_k, T(X_k) = X_{k+1}$. به سادگی می توان به استقرا ثابت کرد که

$$x_i^{(k+m)} \equiv \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} x_{i+j}^{(k)} \quad (\text{به پیمانه } 2)$$

فرض کنید $X_{-1} = (1, \dots, 1, 0)$. توجه کنید که اگر به ازای a و b ای غیر منفی $X_a = X_b$ ، آنگاه تصویرهای X_{a-1} و X_{b-1} تحت اثر T هر دو برابر با X_a هستند و چون در تصویر T هستند، پس تعداد زوجی ۱ دارند (توجه کنید که X_{-1} را طوری انتخاب کرده ایم که این ویژگی را داشته باشد). پس X_{a-1} و X_{b-1} متمم یکدیگر نیستند و در نتیجه $X_{a-1} = X_{b-1}$. اگر این کار را تکرار کنیم معلوم می شود که $X_{|a-b|-1} = X_{-1}$. از طرف دیگر، می توان X_{t-1} را به شکل $T^t(X_{-1})$ یا

$$T^t(0, \dots, 0, 1)$$

نوشت. به این ترتیب

$$\begin{aligned} x_i^{(t-1)} &\equiv \sum_{j \equiv i(n) \text{ (به پیمانه } n)} \binom{t}{j} \\ &\equiv \sum_{j \equiv -i(n) \text{ (به پیمانه } n)} \binom{t}{t-j} \\ &\equiv \sum_{k \equiv t+i(n) \text{ (به پیمانه } n)} \binom{t}{j} \equiv x_{-t-i}^{(t-1)} \end{aligned}$$

به ویژه $x_{-t}^{(i)} \equiv x_{-t}^{(t-1)}$. پس اگر $X_{t-1} = X_{-1}$ ، آنگاه $x_{-t}^{(-1)} \equiv 0$ که فقط وقتی ممکن است که $t \mid n$. به ویژه اگر $X_m = X_n$ ، آنگاه $X_{|m-n|-1} = X_{-1}$ و در نتیجه $n \mid m - n$ یعنی m مضرب n است.

یازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۶

مسئله ۱. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث حاده ABC باشد. مماسهایی که از نقطه A بر دایره به قطر BC رسم شده‌اند، در نقطه‌های P و Q بر این دایره مماس‌اند. ثابت کنید نقطه‌های P ، Q و H روی یک خط راست قرار دارند.

راه حل

خط PQ ، قطبی نقطه A نسبت به دایره به قطر BC است. بنابراین، کافی است ثابت کنیم نقطه A روی قطب نقطه H است. فرض کنید D و E به ترتیب پای ارتفاعهای نظیر رأسهای A و B باشند. این نقطه‌ها روی دایره به قطر BC هم قرار دارند و H نقطه برخورد AD و BE است. قطبی خط AD محل برخورد مماسهای AA و DD است و قطبی خط BE محل برخورد مماسهای BB و EE است. اکنون اگر از قضیه پاسکال در شش ضلعیهای محاطی $ABBDEE$ و $AABDDE$ استفاده کنیم، معلوم می‌شود که این دو نقطه برخورد و C (که محل برخورد AE و BD است) روی یک خط راست قرار دارند.

مسئله ۲. کوچکترین عدد طبیعی مانند k را پیدا کنید که هر زیرمجموعه k عضوی مجموعه $\{1, 2, \dots, 50\}$ ، شامل دو عضو متمایز مانند a و b باشد که ab بر $a + b$ بخش پذیر باشد.

راه حل

ثابت می‌کنیم کمترین مقدار موردنظر برای k برابر با ۳۹ است. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از مجموعه

$\{1, 2, \dots, 50\}$ باشد و a و b دو عضو متمایز S باشند که ab بر $a + b$ بخش پذیر است. فرض کنید c بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b باشد و $a = ca_1$ و $b = cb_1$ (در نتیجه a_1 و b_1 نسبت به هم اول اند). در این صورت $a_1 b_1 c^2$ بر $c(a_1 + b_1)$ بخش پذیر است، پس $ca_1 b_1$ بر $a_1 + b_1$ بخش پذیر است. چون a_1 و b_1 نسبت به هم اول اند، پس $a_1 + b_1$ و a_1 و نیز b_1 و $a_1 + b_1$ نسبت به هم اول اند. بنابراین c بر $a_1 + b_1$ بخش پذیر است.

چون S زیرمجموعه مجموعه $\{1, 2, \dots, 50\}$ است، پس $a + b \leq 99$ و در نتیجه $c(a_1 + b_1) \leq 99$ ؛ پس $a_1 + b_1 \leq 9$. از طرف دیگر، $a_1 + b_1 \geq 3$. اکنون به سادگی می توان تحقیق کرد که ۲۳ زوج از a و b ویژگی مورد نظر را دارند:

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 = 3: & (6, 3), (12, 6), (18, 9), (24, 12) \\ & (30, 15), (36, 18), (42, 21), (48, 24) \\ a_1 + b_1 = 4: & (12, 4), (24, 8), (36, 12), (48, 16) \\ a_1 + b_1 = 5: & (20, 5), (40, 10), (15, 10), (30, 20), (45, 30) \\ a_1 + b_1 = 6: & (30, 6) \\ a_1 + b_1 = 7: & (42, 7), (35, 14), (28, 21) \\ a_1 + b_1 = 8: & (40, 24) \\ a_1 + b_1 = 9: & (45, 36) \end{aligned}$$

فرض کنید

$$M = \{6, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 35, 40, 42, 45, 48\}$$

$$T = \{1, 2, \dots, 50\} - M$$

چون هریک از زوجهایی که در بالا آوردیم شامل عضوی از M است، پس T ویژگی مورد نظر را ندارد. بنابراین

$$k \geq |T| + 1 = 39$$

از طرف دیگر، از میان زوجهایی که در بالا ذکر کردیم می توانیم ۱۲ زوج دوبه دو متمایز انتخاب کنیم:

$$\begin{aligned} & (6, 3), (12, 4), (20, 5), (42, 7), (24, 8), (18, 9) \\ & (40, 10), (35, 14), (30, 15), (48, 16), (28, 21), (45, 36) \end{aligned}$$

هر زیرمجموعه ۳۹ عضوی باید شامل هر دو عضوی از این زوجها باشد. پس کمترین مقدار مورد نظر برای k برابر با ۳۹ است.

مسألهٔ ۳. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که به ازای هر دو عدد حقیقی مانند x و y ,

$$f(x^3 + y^3) = (x + y) \left(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2 \right)$$

ثابت کنید که به ازای هر عدد حقیقی مانند x ، $f(1996x) = 1996f(x)$.

راه حل

اگر در معادلهٔ مفروض فرض کنیم $x = y = 0$ ، نتیجه می شود $f(0) = 0$. همچنین، اگر در این معادله فرض کنیم $y = 0$ ، نتیجه می شود $f(x^3) = xf(x)^2$ ، پس

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2$$

از این نابرابری نتیجه می شود که اگر $x \geq 0$ ، آنگاه $f(x) \geq 0$ و اگر $x < 0$ ، آنگاه $f(x) < 0$. فرض کنید S مجموعهٔ همهٔ عددهای مثبت مانند a باشد که به ازای هر عدد حقیقی مانند x ,

$$f(ax) = af(x)$$

معلوم است که ۱ عضو S است. ثابت می کنیم که اگر a عضوی از S باشد، $a^{\frac{1}{3}}$ هم عضو S است. درحقیقت،

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f\left(\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^3\right) = a^{\frac{1}{3}}f\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^2$$

و درنتیجه

$$\left(a^{\frac{1}{3}}f(x)\right)^2 = f\left(a^{\frac{1}{3}}x\right)^2$$

چون علامت x و $f(x)$ یکسان است، پس

$$f\left(a^{\frac{1}{3}}x\right) = a^{\frac{1}{3}}f(x)$$

اکنون ثابت می کنیم که اگر a و b عضو S باشند، $a + b$ هم عضو S است. توجه کنید که اگر a و b عضو S باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} f((a+b)x) &= f\left(\left(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^3\right) \\ &= \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(f\left(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - f\left(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)f\left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right) + f\left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}\right)^2\right) \\ &= \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) \left(a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right) x^{\frac{1}{3}} f\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (a+b)f(x) \end{aligned}$$

یعنی $a + b$ هم عضو S است. به این ترتیب، از استقرایی ساده نتیجه می‌شود که هر عدد طبیعی عضو S است. به‌ویژه، به‌ازای هر عدد حقیقی مانند x

$$f(1996x) = 1996f(x)$$

مسأله ۴. هشت خواننده در یک جشنواره هنری که m آواز در آن خوانده می‌شود شرکت کرده‌اند. هر آواز را چهار خواننده خوانده‌اند و تعداد آوازهایی که هر دو خواننده هر دو خوانده‌اند یکسان است. کوچکترین مقدار m را طوری پیدا کنید که چنین کاری ممکن باشد.

راه‌حل

فرض کنید تعداد آوازهایی که هر دو خواننده هر دو خوانده‌اند برابر با r باشد. در این صورت

$$m \binom{4}{2} = r \binom{8}{2}$$

پس $m = \frac{14r}{3}$. بنابراین $m \geq 14$. همچنین، اگر خواننده‌ها را به شکل زیر دسته‌بندی کنیم معلوم می‌شود که حالت $m = 14$ ممکن است:

$$\begin{array}{llll} \{1, 2, 3, 4\}, & \{5, 6, 7, 8\}, & \{1, 2, 5, 6\}, & \{3, 4, 7, 8\} \\ \{3, 4, 5, 6\}, & \{1, 3, 5, 7\}, & \{2, 4, 6, 8\}, & \{1, 3, 6, 8\} \\ \{2, 4, 5, 7\}, & \{1, 4, 5, 8\}, & \{2, 3, 6, 7\}, & \{1, 4, 6, 7\} \\ \{1, 2, 7, 8\}, & \{2, 3, 5, 8\} & & \end{array}$$

مسأله ۵. فرض کنید n عددی طبیعی باشد، $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_n$ عددهایی مثبت باشند و $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ ثابت کنید

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\dots+x_{i-1}} \sqrt{x_i+\dots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

راه‌حل

توجه کنید که بنابر نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی،

$$\sqrt{1+x_0+\dots+x_{i-1}} \sqrt{x_i+\dots+x_n} \leq \frac{1}{2}(1+x_0+\dots+x_n) = 1$$

و در نتیجه

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\dots+x_{i-1}} \sqrt{x_i+\dots+x_n}} \geq \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

اکنون فرض کنید

$$\theta_i = \arcsin (x_0 + \cdots + x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

در این صورت

$$\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \sqrt{x_i + \cdots + x_n} = \cos \theta_{i-1}$$

پس نابرابری

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + \cdots + x_{i-1}} \sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

با نابرابری

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} < \frac{\pi}{2}$$

هم‌ارز است. توجه کنید که

$$\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1} = 2 \cos \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} \sin \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < \cos \theta_{i-1} (\theta_i - \theta_{i-1})$$

زیرا $\theta_{i-1} < \theta_i$ و اگر $x > 0$ ، $\sin x < x$ در نتیجه

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} < \sum_{i=1}^n (\theta_i - \theta_{i-1}) = \theta_n - \theta_0 < \frac{\pi}{2}$$

مسأله ۶. در مثلث ABC ، $\angle C = 90^\circ$ ، $\angle A = 30^\circ$ و $BC = 1$. کمترین مقدار ممکن طول بلندترین ضلع مثلثی را پیدا کنید که در مثلث ABC محاط شده است (یعنی هر رأسش روی یک ضلع مثلث ABC قرار دارد).

راه حل

ابتدا کمترین مقدار ممکن طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاعی را پیدا می‌کنیم که در مثلث ABC محاط شده است. فرض کنید D نقطه‌ای روی BC باشد و $x = BD$ و نقطه‌های E و F را به ترتیب روی CA و AB طوری انتخاب می‌کنیم که

$$CE = \frac{\sqrt{3}x}{2}, \quad BE = 1 - \frac{x}{2}$$

به این ترتیب، از قانون کسینوسها نتیجه می‌شود

$$DF^2 = DE^2 = EF^2 = \frac{1}{4}x^2 - x + 1 = \frac{1}{4} \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

پس مثلث DEF متساوی الاضلاع است و کمترین مقدار طول ضلع آن برابر است با $\sqrt{\frac{7}{3}}$.

اکنون ثابت می‌کنیم که کمترین مقدار ممکن طول بلندترین ضلع مثلثهای محاطی به‌ازای مثلثی متساوی الاضلاع به‌دست می‌آید. مثلثی محاطی در نظر بگیرید و فرض کنید که متساوی الساقین نباشد. در این صورت می‌توانیم یکی از دو سر بلندترین ضلع این مثلث را آنقدر بلغزانیم تا طولش کمتر شود. این کار را ادامه می‌دهیم تا اینکه به دو ضلع مانند DE و EF که بلندترین ضلعها هستند برسیم. اکنون D را ثابت نگه می‌داریم، E را طوری حرکت می‌دهیم که طول DE کمتر شود و F را طوری حرکت می‌دهیم که طول EF کمتر شود. این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم که طول هر سه ضلع برابر شود.

بنابراین کمترین مقدار مورد نظر برابر با $\sqrt{\frac{7}{3}}$ است.

دوازدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۷

مسأله ۱. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ عددهایی حقیقی باشند و

$$(الف) \quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3} \quad 1 \leq i \leq 1997;$$

$$(ب) \quad x_1 + x_2 + \dots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$$

بیشترین مقدار ممکن $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2$ را پیدا کنید.

راه حل

چون x_i^2 تابعی محدب است، مجموع $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2$ وقتی بیشترین مقدار ممکن است که هر یک x_i ها بجز حداکثر یکی از آنها یکی از دو سر بازه $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ باشد. فرض کنید n تا از x_i ها برابر با $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $n - 1996$ تا از آنها برابر با $\sqrt{3}$ باشند. در این صورت تنها عدد باقی مانده برابر است با

$$-318\sqrt{3} + \frac{n}{\sqrt{3}} - (1996 - n)\sqrt{3}$$

این عدد هم باید در بازه $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$ باشد و در نتیجه

$$-1 \leq 3(-318) + n - 3(1996 - n) \leq 3$$

یا

$$-1 \leq 4n - 6942 \leq 3$$

چون n عددی طبیعی است، پس $n = ۱۷۳۶$ و عدد موردنظر $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ است. بیشترین مقدار عبارت موردنظر برابر است با

$$۱۷۳۶ \times ۳^{-۶} + ۲۶۰ \times ۳^۶ + \left(\frac{۴}{۳}\right)^۶$$

مسأله ۲. فرض کنید $A_1 B_1 C_1 D_1$ چهارضلعی محدب و P نقطه‌ای درون آن باشد. فرض کنید زاویه‌های $PA_1 D_1$ و $PA_1 B_1$ حاده باشند و همین‌طور در مورد سه رأس دیگر. A_k, B_k, C_k و D_k را به ترتیب قرینه‌های P نسبت به $A_{k-1} B_{k-1}, B_{k-1} C_{k-1}, C_{k-1} D_{k-1}$ و $D_{k-1} A_{k-1}$ بگیرد.

الف) از چهارضلعیهای $A_k B_k C_k D_k$ ، $۱ \leq i \leq ۱۲$ ، کدام یک لزوماً با چهارضلعی ۱۹۹۷ام متشابه است؟

ب) فرض کنید چهارضلعی ۱۹۹۷ام محاطی باشد. کدام یک از ۱۲ چهارضلعی نخست هم محاطی است؟

راه حل

می‌توانیم A_k را پای عمود وارد از P به $A_{k-1} B_{k-1}$ بگیریم و همین‌طور در مورد بقیه نقطه‌ها. در این صورت با در نظر گرفتن چهارضلعیهای محاطی به قطرهای PA_k, PB_k, PC_k, PD_k معلوم می‌شود

$$\begin{aligned}\angle PA_k B_k &= \angle PD_{k+1} A_{k+1} \\ &= \angle PC_{k+2} D_{k+2} \\ &= \angle PB_{k+3} C_{k+3} \\ &= \angle PC_{k+4} D_{k+4}\end{aligned}$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود $\angle PB_k A_k = \angle PB_{k+1} A_{k+1}$ و غیره. بنابراین از میان چهارضلعیهای موردنظر، فقط چهارضلعیهای ۱، ۵ و ۹ با چهارضلعی ۱۹۹۷ام متشابه‌اند. از طرف دیگر، اگر چهارضلعی ۱۹۹۷ام محاطی باشد (یعنی زاویه‌های روبه‌رو در این چهارضلعی مکمل باشند)، چهارضلعیهای ۳، ۷ و ۱۱ هم محاطی‌اند.

مسأله ۳. ثابت کنید بی‌نهایت عدد طبیعی مانند n وجود دارد به‌طوری که می‌توان عددهای ۱، ۲، ... و $۳n$ را به ترتیبی با

$$a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n$$

طوری برچسب زد که

الف) $c_1 + b_1 + a_1, \dots, c_n + b_n + a_n$ با هم برابر باشند و هر یک از آنها بر ۶ بخش پذیر باشد.
 ب) $a_1 + \dots + a_n, b_1 + \dots + b_n, c_1 + \dots + c_n$ با هم برابر باشند و هر یک از آنها بر ۶ بخش پذیر باشد.

راه حل

مجموع عددهای از ۱ تا $3n$ برابر است با $\frac{3n(3n+1)}{2}$ ، که می خواهیم هم بر $6n$ بخش پذیر باشد هم بر ۹. پس n باید مضربی از ۳ و به پیمانه ۴ همنهشت ۱ باشد. ثابت می کنیم که اگر $n = 9^m$ ، آنگاه عدد n ویژگی مورد نظر را دارد. به ازای $n = 9$ از آرایش

۸	۱	۶	۱۷	۱۰	۱۵	۲۶	۱۹	۲۴
۲۱	۲۳	۲۵	۳	۵	۷	۱۲	۱۴	۱۶
۱۳	۱۸	۱۱	۲۲	۲۷	۲۰	۴	۹	۲

استفاده کنید (که در آن سطر اول $a_1, a_2, \dots$ است و همین طور در مورد بقیه سطرها). کافی است از آرایشهایی برای k (که آنها را با a_i ها، b_i ها و c_i ها نشان می دهیم) و l (که آنها را با a'_i ها، b'_i ها و c'_i ها نشان می دهیم) آرایشی برای kl (که آنها را با a''_i ها، b''_i ها و c''_i ها نشان می دهیم) تشکیل دهیم:

$$a''_{i+(j-1)k} = a_i + (k-1)a'_j, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

همین طور در مورد b_i و c_i .

مسأله ۴. فرض کنید $ABCD$ چهارضلعی محاطی باشد. خطهای AB و CD در نقطه P و خطهای AD و BC در نقطه Q یکدیگر را قطع کرده اند. فرض کنید E و F نقطه های تماس مسامهای مرسوم از نقطه Q بر دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ باشند. ثابت کنید نقطه های P ، E و F روی یک خط راست قرار دارند.

راه حل

فرض کنید X' مماس بر دایره محیطی در نقطه X روی آن باشد. نگاشت قطبی نسبت به دایره محیطی چهارضلعی $ABCD$ را در نظر بگیرید. برای اینکه ثابت کنیم نقطه های P ، E و F روی یک خط راست قرار دارند، ثابت می کنیم قطبهای آنها روی یک خط راست قرار دارند. E و F به E' و F' نگاشته می شوند که یکدیگر را در نقطه Q قطع می کنند. چون نقطه برخورد AB و CD است، قطب P خطی است که از نقطه برخورد A' و B' و نقطه برخورد C' و D' می گذرد و در نتیجه، باید

ثابت کنیم که این نقطه‌ها و Q روی یک خط راست قرار دارند.

از طرف دیگر، بنابر قضیه پاسکال در مورد شش ضلعی $AADBBC$ ، نقطه برخورد A' و B' ، نقطه Q و نقطه برخورد AC و BD روی یک خط راست قرار دارند. همچنین، بنابر قضیه پاسکال در مورد شش ضلعی $ADDBCC$ ، نقطه برخورد C' و D' هم با نقطه Q و نقطه برخورد AC و BD روی یک خط راست قرار دارد.

مسئله ۵. فرض کنید $A = \{1, 2, \dots, 17\}$ و به ازای هر تابع مانند $A \rightarrow A : f$ فرض کنید $f^{[1]}(x) = f(x)$ و اگر k عددی طبیعی باشد،

$$f^{[k+1]}(x) = f(f^{[k]}(x))$$

بزرگترین عدد طبیعی مانند M را طوری پیدا کنید که تابعی یک به یک و پوشا مانند $A \rightarrow A : f$ وجود داشته باشد که

الف) اگر $m < M$ و $1 \leq i \leq 17$ ، آنگاه

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm 1 \pmod{17} \quad (\text{به پیمانه } 17)$$

ب) به ازای $1 \leq i \leq 17$ ،

$$f^{[M]}(i+1) - f^{[M]}(i) \equiv \pm 1 \pmod{17} \quad (\text{به پیمانه } 17)$$

$$(f^{[k]}(18) = f^{[k]}(1)) \quad \text{در اینجا}$$

راه حل

اگر $M = 8$ ، مقدار تابع f را به ازای x برابر با باقیمانده تقسیم $3x$ بر ۱۷ بگیرید. در این صورت تابع f ویژگیهای مورد نظر را دارد. ثابت می‌کنیم بیشترین مقدار M برابر با ۸ است. توجه کنید که با ترکیب f با یک تغییر جای دوری، می‌توانیم فرض کنیم که $f(17) = 17$. در این صورت M کوچکترین عدد صحیحی است که $f^{[M]}(1)$ یا ۱ است یا ۱۶ و همین‌طور در مورد ۱۶. اگر ۱ یا ۱۶ در یک مدار جایگشت f قرار داشته باشند، طول این مدار حداکثر ۱۶ است و در نتیجه یا ۱ یا ۱۶ باید پس از ۸ مرحله به دیگری نگاشته شود؛ پس $M \leq 8$. اگر این عددها در مدارهای مختلفی قرار داشته باشند، طول یکی از این مدارها (و در نتیجه طول هر دو) حداکثر ۸ است، و در نتیجه باز هم $M \leq 8$.

مسئله ۶. فرض کنید $a_1, a_2, \dots$ عددهایی نامنفی باشند و

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \quad m, n \geq 1$$

ثابت کنید اگر $n \geq m$

$$a_n \leq m a_1 + \left(\frac{n}{m} - 1 \right) a_m$$

راه حل

به استقرا روی k معلوم می شود که اگر $k < \frac{m}{n}$ ، آنگاه

$$a_n \leq k a_m + a_{n-mk}$$

فرض کنید که $n = mk + r$ که در آن $r \in \{1, \dots, m\}$. در این صورت

$$a_n \leq k a_m + a_r = \frac{n-r}{m} a_m + a_r \leq \frac{n-m}{m} a_m + m a_1$$

زیرا

$$a_m \leq m a_1, \quad a_r \leq r a_1$$

سیزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۸

مسأله ۱. فرض کنید ABC مثلثی غیرمنفرجه باشد، $AB > AC$ و $\angle B = 45^\circ$. فرض کنید O و I به ترتیب مرکز دایره محیطی و مرکز دایره محاطی مثلث ABC باشند. فرض کنید $\sqrt{2}OI = AB - AC$. همه مقادیرهای ممکن $\sin A$ را پیدا کنید.

راه حل اول

فرض کنید R و r به ترتیب شعاع دایره محیطی و شعاع دایره محاطی مثلث ABC باشند. توجه کنید که

$$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan \frac{B}{2} = \sqrt{2} - 1$$

و بنابر قانون سینوسها،

$$BC = 2R \sin A, \quad AC = 2R \sin B, \quad AB = 2R \sin C$$

پس

$$\begin{aligned} r &= \frac{AB + BC - AC}{2} \tan \frac{B}{2} \\ &= R(\sqrt{2} - 1)(\sin C + \sin A - \sin B) \end{aligned}$$

اکنون توجه کنید که بنابر قضیه اویلر، $OI^2 = R(R - 2r)$ و در نتیجه

$$OI^2 = R^2 \left(1 - 2(\sqrt{2} - 1)(\sin C + \sin A - \sin B) \right) \quad (1)$$

از طرف دیگر، $\sqrt{2}OI = AB - AC$ و در نتیجه

$$OI^2 = \frac{(AB - AC)^2}{2} = 2R^2(\sin C - \sin B)^2 \quad (2)$$

از تساویهای (۱) و (۲) نتیجه می شود

$$2(\sin C - \sin B)^2 = 1 - 2(\sqrt{2} - 1)(\sin C + \sin A - \sin B) \quad (3)$$

اما

$$\sin C = \sin(135^\circ - A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$$

بنابراین تساوی (۳) با تساویهای زیر هم ارز است

$$\begin{aligned} & (\sin A + \cos A)^2 - 2(\sin A + \cos A) \\ &= (\sqrt{2} - 2)(\sin A + \cos A) + 2(1 - \sqrt{2})\sin A + 2 - \sqrt{2} \\ & 1 + 2\sin A \cos A = (2 - \sqrt{2})\sin A + \sqrt{2}\cos A + 2 - \sqrt{2} \\ & (\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2} + 1) = 0 \end{aligned}$$

پس یا $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ یا $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ و در نتیجه

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$$

راه حل دوم

فرض کنید I_a و I_b و I_c به ترتیب پای عمودهای وارد از نقطه I بر ضلعهای BC ، AC و AB باشند و D پای عمود وارد از O بر BC باشد. چون OD روی عمود منصف ضلع BC قرار دارد، پس $BD = CD$. همچنین، چون I روی نیمساز زاویه های A ، B و C قرار دارد،

$$AI_b = AI_c, \quad BI_a = BI_c, \quad CI_a = CI_b$$

به این ترتیب

$$\begin{aligned} \sqrt{2}OI &= AB - AC \\ &= (AI_c + I_cB) - (AI_b + I_bC) \\ &= I_cB - I_bC = BI_a - CI_a \end{aligned}$$

چون $AB > AC$ و D روی BI_a است،

$$BI_a = BD + DI_a, \quad CI_a = CD - DI_a$$

بنابراین $\sqrt{2}OI = 2DI_a$ و در نتیجه $OI = \sqrt{2}DI_a$. پس زاویه میان OI و DI_2 برابر با 45° است. بنابراین دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. OI بر AB عمود است. در این صورت OI عمود منصف AB است. بنابراین $\angle A = \angle B$ و $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

حالت ۲. OI با AB موازی است. فرض کنید E پای عمود وارد از O بر AB باشد. در این صورت $\angle AOE = \angle C$. پس

$$R \cos \angle AOE = R \cos C = OE = II_c = r$$

که در آن r شعاع دایره محاطی مثلث ABC است. اکنون توجه کنید که اگر R شعاع دایره محیطی مثلث ABC باشد،

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \cos C &= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\ &= 2 \sin \frac{B}{2} \left(\cos \frac{A-C}{2} - \cos \frac{A+C}{2} \right) \\ &= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin^2 \frac{B}{2} \\ &= \sin \frac{A+B-C}{2} + \sin \frac{B+C-A}{2} + \cos B - 1 \\ &= \cos C + \cos A + \cos B - 1 \end{aligned}$$

پس

$$\cos A = 1 - \cos B = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

و در نتیجه

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$$

مسئله ۲. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$. آیا $2n$ عدد طبیعی متمایز مانند $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ وجود دارند که

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad (\text{الف})$$

$$n-1 > \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n-1 - \frac{1}{1998} \quad (\text{ب})$$

راه حل

ثابت می‌کنیم که $2n$ عدد با ویژگیهای موردنظر وجود دارند. ابتدا توجه کنید که اگر $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ و ... عددهایی طبیعی و متمایز باشند و

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$$

آنگاه

$$n-1 > \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i}$$

برای اثبات این مطلب توجه کنید که جای وجود دارد که $b_j > a_j$ ، پس

$$\frac{2b_j}{a_j + b_j} > 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} &= \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{2b_i}{a_i + b_i} \right) \\ &= n - \sum_{i=1}^n \frac{2b_i}{a_i + b_i} < n-1 \end{aligned}$$

اکنون فرض کنید N عددی طبیعی باشد و

$$a_i = (2i-1)N, \quad b_i = 2i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

در این صورت

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} a_i &= n(n-1)N - (n-1)N \\ \sum_{i=1}^{n-1} b_i &= n(n-1) \end{aligned}$$

برای اینکه شرط (الف) برقرار باشد، باید

$$b_n = a_n + (n-1)(N(n-1) - n)$$

در این صورت

$$n-1 > \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} = n - \frac{2a_n + 2(n-1)(N(n-1) - n)}{2a_n + (n+1)(N(n-1) - n)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{2i + N(2i-1)} \quad (*)$$

به این ترتیب، اگر

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{N^2} = +\infty$$

(مثلاً وقتی که $a_n = N^2$) مقدار سمت راست (*) به $n-1$ میل می‌کند. بنابراین اگر ε عددی مثبت باشد (مثلاً $\varepsilon = \frac{1}{1998}$)، می‌توانیم عددهایی طبیعی مانند N و a_n پیدا کنیم که a_i ها و b_i ها متمایز باشند و

$$a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n$$

$$n-1 > \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} > n-1 - \varepsilon$$

مسئله ۳. فرض کنید $S = \{1, 2, \dots, 98\}$. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که به ازای هر زیرمجموعه n عضوی از S مانند T بتوان زیرمجموعه‌ای ده‌عضوی از T پیدا کرد که هر طور که آن را به دو زیرمجموعه پنج‌عضوی افزایش دهیم، در یکی از آنها عضوی وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول باشد و در دیگری عضو وجود داشته باشد که نسبت به چهار عضو دیگر اول نباشد.

راه‌حل

چون بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک هر دو عضو مجموعه ۴۹ عضوی $\{2, 4, 6, \dots, 98\}$ بزرگتر از ۱ است، پس باید $n > 49$. ثابت می‌کنیم هر زیرمجموعه ۵۰ عضوی از S ویژگی موردنظر را دارد. فرض کنید T زیرمجموعه‌ای ۵۰ عضوی از S باشد. ابتدا توجه کنید که اگر T عضوی فرد مانند x داشته باشد که نسبت به دست‌کم ۹ عضو زوج T اول باشد، ویژگی موردنظر را دارد. درحقیقت، فرض کنید T_1 مجموعه x و ۹ عدد زوج عضو T باشد که نسبت به x اول‌اند. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که T_1 ویژگیهای موردنظر را دارد. تعداد عددهای زوج عضو T را با $e(T)$ نشان می‌دهیم. چند حالت وجود دارد.

حالت ۱. $e(T) \geq 31$. چون T حداکثر ۴۹ عضو زوج دارد، پس عددی فرد مانند x هم عضو T است. چون $105 = 3 \times 5 \times 7$ ، پس x حداکثر دو مقسوم‌علیه اول متمایز دارد. اگر x عددی اول باشد، هر عدد زوج عضو S که مقسوم‌علیه مشترکی با x داشته باشد باید مضربی از ۲ باشد؛ پس

حداکثر $\lfloor \frac{98}{6} \rfloor$ یا ۱۶ عدد این چنینی وجود دارد. اگر x حاصل ضرب دو عدد اول متمایز باشد، حداکثر $\lfloor \frac{98}{30} \rfloor - \lfloor \frac{98}{10} \rfloor + \lfloor \frac{98}{6} \rfloor$ یا ۲۲ عدد زوج عضو S وجود دارند که مقسوم علیه مشترکی با x دارند. اما $e(T) \geq 31$ ، پس T دستکم ۹ عضو زوج دارد که نسبت به x اول اند. پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۲. $21 \leq e(T) \leq 30$. در این صورت T دستکم ۲۰ عضو فرد دارد. تعداد مضربهای فرد در S برابر با ۱۶ است، بنابراین می توان در T عددی مانند x انتخاب کرد که بر ۳ بخش پذیر نباشد و ۳۵ یا ۵۵ هم نباشد. اگر $x = 5$ ، $\lfloor \frac{98}{10} \rfloor$ یا ۹ عدد زوج در S وجود دارند که مقسوم علیه مشترکی با x دارند. اگر $x = 5p$ ، که در آن p عددی اول است و $p \geq 13$ ، در S حداکثر $\lfloor \frac{98}{26} \rfloor + \lfloor \frac{98}{10} \rfloor$ یا ۱۲ عدد زوج وجود دارد که مقسوم علیه مشترکی با x دارند. اگر x عددی اول و بزرگتر از ۷ باشد، در S حداکثر $\lfloor \frac{98}{14} \rfloor$ یا ۷ عدد زوج وجود دارد که مقسوم علیه مشترکی با x دارند. اگر x حاصل ضرب دو عدد اول باشد که یکی از آنها از ۵ بزرگتر است، در S حداکثر $\lfloor \frac{98}{22} \rfloor + \lfloor \frac{98}{14} \rfloor$ یا ۱۱ عدد زوج وجود دارد که مقسوم علیه مشترکی با x دارند. پس همواره حداکثر ۱۲ عدد زوج در S مقسوم علیه مشترکی با x دارند. پس دستکم $12 - 21$ یا ۹ عدد زوج در T وجود دارند که نسبت به x اول اند. به این ترتیب، بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۳. $11 \leq e(T) \leq 20$. در این صورت T دستکم ۳۰ عضو فرد دارد. S ، ۱۶ عضو فرد دارد که کوچکترین مقسوم علیه اولشان ۳ است، ۷ عضو فرد دارد که کوچکترین مقسوم علیه اولشان ۵ است، ۴ عضو فرد دارد که کوچکترین مقسوم علیه اولشان ۷ است و به ازای هر عدد اول مانند p که $97 > p \geq 7$ ، یک عضو دارد که کوچکترین مقسوم علیه اولش p است. چون

$$16 + 7 + 4 + 1 + 1 = 29$$

می توانیم x را طوری انتخاب کنیم که کوچکترین مقسوم علیه اولش دستکم ۱۷ باشد. بنابراین حداکثر $\lfloor \frac{98}{34} \rfloor$ یا ۲ عدد زوج در X وجود دارند که نسبت به x اول اند. بنابراین T دستکم ۹ عضو زوج دارد که نسبت به x اول اند. پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۴. $e(T) = 9$ یا $e(T) = 10$. در این صورت T دستکم ۴۰ عضو فرد دارد. بنابراین دستکم یکی از عددهای اول ۵۳، ۵۹، ۶۱، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ۸۳، ۸۹ یا ۹۷ باید در T باشد. فرض کنید x یکی از این عددهای اول باشد. در این صورت عدد زوجی در T وجود ندارد که مقسوم علیه مشترکی با x داشته باشد. بنابراین دستکم ۹ عدد زوج در T وجود دارند که نسبت به x اول اند. پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم حکم درست است.

حالت ۵. $e(T) \leq 8$. در این صورت T دستکم ۴۲ عضو فرد دارد. بنابراین دستکم یکی از

عددهای اول ۶۱، ۶۷، ... و ۹۷ عضو T است. فرض کنید x یکی از این عددهای اول باشد. تعداد مضربهای فرد ۳ در S برابر با ۱۶ است. چون حداکثر ۷ عدد فرد عضو T نیستند، پس دستکم ۹ تا از این مضربهای ۳ عضو T هستند. فرض کنید T_1 مجموعه x و این ۹ مضرب ۳ باشد. در این صورت T_1 ویژگیهای موردنظر را دارد.

مسئله ۴. همه عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که $n \geq 3$ و 2^{2000} بر

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$$

بخش پذیر باشد.

راه حل

فرض کنید عدد طبیعی n ویژگیهای موردنظر را داشته باشد. چون ۲ عددی اول است، پس عددی طبیعی مانند k وجود دارد که $k \leq 2000$ و

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 2^k$$

اما

$$1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{(n+1)(n^2 - n + 6)}{6}$$

پس

$$(n+1)(n^2 - n + 6) = 3 \times 2^{k+1}$$

فرض کنید $m = n + 1$. در این صورت $m \geq 4$ و

$$m(m^2 - 3m + 8) = 3 \times 2^{k+1}$$

دو حالت وجود دارد.

حالت ۱. عددی طبیعی مانند r وجود دارد که $m = 2^r$. توجه کنید که چون $m \geq 4$ ، پس $r \geq 2$. عددی صحیح و نامنفی مانند t وجود دارد که

$$2^{2r} - 3 \times 2^r + 8 = 3 \times 2^t$$

اگر $r \geq 4$ ، آنگاه باید

$$8 \equiv 3 \times 2^t \pmod{16} \text{ (به‌یمنانه ۱۶)}$$

بنابراین $2^t = 8$. در نتیجه $2^t - 3m + 8 = 24$ ، که در مجموعه عددهای طبیعی جواب ندارد. بنابراین $r = 2$ یا $r = 3$. در نتیجه یا $n = 3$ یا $n = 7$. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر

$n = 3$ یا $n = 7$ ، عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را دارد.

حالت ۲. عددی طبیعی مانند s وجود دارد که $m = 3 \times 2^s$. بنابراین عددی طبیعی مانند u وجود دارد که

$$9 \times 2^{2s} - 9 \times 2^s + 8 = 2^u$$

به سادگی می توان تحقیق کرد که $1, 2 \neq s$. بنابراین $s \geq 3$. اگر $s \geq 4$ ، آنگاه

$$8 \equiv 2^u \pmod{16}$$

بنابراین $2^u = 8$. در نتیجه $m^2 - 3m = 0$ ، که ممکن نیست. پس $s = 3$ و در نتیجه $n = 23$. به سادگی می توان تحقیق کرد که اگر $n = 23$ ، عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را دارد.

مسئله ۵. فرض کنید D نقطه ای درون مثلث حاده ABC باشد و

$$DA \times DB \times AB + DB \times DC \times BC + DC \times DA \times CA = AB \times BC \times CA$$

جای نقطه D را مشخص کنید.

راه حل

ثابت می کنیم

$$DA \times DB \times AB + DB \times DC \times BC + DC \times DA \times CA \geq AB \times BC \times CA$$

و تساوی فقط وقتی پیش می آید که D محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد.

نقطه های E و F را طوری انتخاب کنید که $BCDE$ و $BCAF$ متوازی الاضلاع باشند. در این صورت $EDAF$ هم متوازی الاضلاع است. بنابراین

$$AF = DE = BC, \quad EF = AD, \quad BE = CD, \quad BF = AC$$

بنابر قضیه بطلمیوس در چهارضلعی $ABEF$ ،

$$AB \times AD + BC \times CD = AB \times EF + AF \times BE$$

$$\geq AE \times BF = AE \times AC$$

همچنین، بنابر قضیه بطلمیوس در چهارضلعی $AECD$ ،

$$BD \times AE + AD \times CD = BD \times AE + AD \times BE$$

$$\geq AB \times DE$$

$$= AB \times BC$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
& DA \times DB \times AB + DB \times DC \times BC + DC \times DA \times CA \\
&= DB(AB \times AD + BC \times CD) + DC \times DA \times CA \\
&\geq DB \times AE \times AC + DC \times DA \times CA \\
&= AC(BD \times AE + AD \times CD) \\
&\geq AC \times AB \times BC
\end{aligned}$$

توجه کنید که تساوی وقتی پیش می‌آید که $ABEF$ و $AEBD$ محاطی باشند، که هم‌ارز با این است که $AFED$ محاطی باشد. چون $AFED$ متوازی‌الاضلاع و محاطی است، مستطیل هم هست. یعنی AD بر DE عمود است و چون DE با BC موازی است، پس AD بر BC عمود است. چون $AEBD$ محاطی است، زاویه ABE با زاویه ADE برابر است، یعنی BE و در نتیجه CD بر AB عمود است. یعنی D محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است.

مسأله ۶. فرض کنید n عددی طبیعی باشد و $n \geq 2$. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_n$ عددهایی حقیقی باشند و

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1$$

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند $k, k \leq n$ ، بیشترین مقدار $|x_k|$ را پیدا کنید.

راه‌حل

توجه کنید که

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \dots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2 = 2$$

همچنین

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \dots + (x_{k-1} + x_k)^2}{k}} \\
& \geq \frac{|x_1| + |x_1 + x_2| + \dots + |x_{k-1} + x_k|}{k} \\
& \geq \frac{|x_1 - (x_1 + x_2) + \dots + (-1)^{k-1}(x_{k-1} + x_k)|}{k} \\
& = \frac{|x_k|}{k}
\end{aligned}$$

بنابراین

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_{k-1} + x_k)^2 \geq \frac{x_k^2}{k}$$

به همین ترتیب معلوم می شود

$$(x_k + x_{k+1})^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2 \geq \frac{x_k^2}{n - k + 1}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 2 &= x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2 \\ &= \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n - k + 1} \right) x_k^2 \end{aligned}$$

پس

$$|x_k| \leq \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$$

و تساوی وقتی پیش می آید که

$$x_1 = -(x_1 + x_2) = x_2 + x_2 = \cdots = (-1)^{k-1} (x_{k-1} + x_k)$$

$$x_k + x_{k+1} = -(x_{k+1} + x_{k+2}) = \cdots = (-1)^{n-k} x_n$$

یعنی وقتی که

$$x_i = \begin{cases} (-1)^{k-i} \frac{x_k}{k} & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ (-1)^{i-k} \frac{x_k(n+1-i)}{n-k+1} & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

چهاردهمین المپیاد ریاضی چین، ۱۹۹۹

مسأله ۱. فرض کنید مثلثی حاده باشد و $\angle C > \angle B$. فرض کنید D نقطه‌ای روی ضلع BC باشد، زاویه ADB منفرجه باشد و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABD باشد. فرض کنید F نقطه‌ای درون مثلث ABC و روی دایره محیطی مثلث ABD باشد. ثابت کنید F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است، اگر و فقط اگر HD و CF موازی باشند و H روی دایره محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد.

راه حل

همه زاویه را به پیمانه $^\circ 180$ حساب می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که اگر نقطه P محل برخورد ارتفاعهای مثلث UVW باشد، آنگاه

$$\begin{aligned}\angle VPW &= (90^\circ - \angle PWV) + (90^\circ - \angle WVP) \\ &= \angle WVP + \angle UWV \\ &= 180^\circ - \angle VUW\end{aligned}$$

فرض کنید F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد. در این صورت

$$\angle ACB = 180^\circ - \angle AFB = 180^\circ - \angle ADB = \angle AHB$$

پس چهارضلعی $ACHB$ محاطی است. از طرف دیگر، خطهای CF و HD هر دو بر ضلع AB عمودند، در نتیجه با هم موازی‌اند.

برعکس، فرض کنید HD و CF موازی باشند و H روی دایره محیطی مثلث ABC قرار داشته باشد. چون چهارضلعیهای $AHCB$ و $AFDB$ محاطی‌اند، پس

$$\angle AFB = \angle ADB = 180^\circ - \angle AHB = 180^\circ - \angle ACB$$

بنابراین F نقطه برخورد دایره‌ای که با شرط $\angle AFB = 180^\circ - \angle ACB$ تعریف می‌شود با خطی است که با شرط $CF \perp DB$ تعریف می‌شود. فقط دو نقطه این چنینی وجود دارد: محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و قرینه نقطه C نسبت به خط AB . نقطه دوم بیرون مثلث ABC قرار دارد و در نتیجه F محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است.

مسئله ۲. فرض کنید a عددی حقیقی باشد. فرض کنید $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای از چندجمله‌ایها باشد به طوری که $f_0(x) = 1$ و

$$f_{n+1}(x) = x f_n(x) + f_n(ax), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

الف) ثابت کنید

$$f_n(x) = x^n f_n\left(\frac{1}{x}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ب) عبارتی صریح برای $f_n(x)$ پیدا کنید.

راه حل

اگر $a = 1$ ، آنگاه $f_n(x) = (x+1)^n$ ، $n \geq 0$ ، و به سادگی می‌توان تحقیق کرد که حکم درست است. پس فرض می‌کنیم که $a \neq 1$.

توجه کنید که درجه f_n برابر با n و جمله ثابت آن برابر با ۱ است. فرض کنید

$$f_n(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$$

به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $0 \leq i \leq n$ ، آنگاه

$$(a^i - 1)c_i = (a^{n+1-i} - 1)c_{i-1}$$

(فرض کنید $c_{-1} = 0$).

اگر $n = 0$ معلوم است که ادعایمان درست است. فرض کنید ادعایمان در مورد

$$f_{n-1}(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$$

درست باشد، یعنی اگر $i \geq 1$

$$(a^i - 1)b_i = (a^{n-i} - 1)b_{i-1}$$

$$(a^{n+1-i} - 1)b_{i-2} = (a^{i-1} - 1)b_{i-1}$$

اگر $i = 0$ ، باید ثابت کنیم $0 = 0$ ، که درست است. اگر $i \geq 1$ ، از رابطه بازگشتی داده شده نتیجه می‌شود

$$c_i = b_{i-1} + a^i b_i, \quad c_{i-1} = b_{i-2} + a^{i-1} b_{i-1}$$

بنابراین ادعایمان با تساویهای زیر هم‌ارز است:

$$(a^i - 1)(b_{i-1} + a^i b_i) = (a^{n+1-i} - 1)(b_{i-2} + a^{i-1} b_{i-1})$$

$$(a^i - 1)b_{i-1} + a^i(a^i - 1)b_i = (a^{n+1-i} - 1)b_{i-2} + (a^n - a^{i-1})b_{i-1}$$

$$(a^i - 1)b_{i-1} + a^i(a^{n-i} - 1)b_{i-1} = (a^{i-1} - 1)b_{i-1} + (a^n - a^{i-1})b_{i-1}$$

$$(a^n - 1)b_{i-1} = (a^n - 1)b_{i-1}$$

پس ادعایمان درست است.

اکنون توجه کنید که

$$\begin{aligned} c_i &= \frac{c_i}{c_0} = \prod_{k=1}^i \frac{c_k}{c_{k-1}} \\ &= \prod_{k=1}^i \frac{a^{n+1-k} - 1}{a^k - 1} = \frac{\prod_{k=n+1-i}^n (a^k - 1)}{\prod_{k=1}^i (a^k - 1)} \\ &= \frac{\prod_{k=i+1}^n (a^k - 1)}{\prod_{k=1}^{n-i} (a^k - 1)} = \prod_{k=1}^{n-i} \frac{a^{n+1-k} - 1}{a^k - 1} \\ &= \prod_{k=1}^{n-i} \frac{c_k}{c_{k-1}} = \frac{c_{n-i}}{c_0} = c_{n-i} \end{aligned}$$

که عبارت صریح موردنظر را به دست می‌دهد. همچنین توجه کنید که $f_n(x) = x^n f\left(\frac{1}{x}\right)$ اگر و فقط اگر $0 \leq i \leq n$ ، $c_i = c_{n-i}$.

مسأله ۳. ۹۹ ایستگاه فضایی وجود دارد. هر دو تا از این ایستگاههای فضایی با تونلی به هم وصل‌اند. ۹۹ تونل دوطرفه اصلی وجود دارد و بقیه تونلها یک طرفه‌اند. گروهی از ۴ ایستگاه فضایی را همبند می‌نامیم، هرگاه بتوان از هر یک از ایستگاههای این گروه به هر یک از بقیه ایستگاههای دیگر این گروه رفت، به طوری که فقط از ۶ تونلی که آنها را به هم وصل می‌کنند استفاده شود. بیشترین تعداد گروههای همبند را مشخص کنید.

فرض کنید $f: f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$ ؛ f تعمیم تعریف $\binom{x}{3}$ به عددهای حقیقی مانند x است. در گروهی از ۴ ایستگاه فضایی، ایستگاهی را مشکل آفرین می‌نامیم که یا سه تونل یک طرفه به آن ختم شود یا سه تونل یک طرفه از آن خارج شود. در هر گروه، از هر نوع ایستگاه مشکل آفرین حداکثر یکی وجود دارد.

اگر گروهی چهارتایی از ایستگاهها شامل ایستگاهی مشکل آفرین مانند A باشد، یا رفتن به A از دیگر ایستگاهها ممکن نیست یا رفتن به دیگر ایستگاهها از A ممکن نیست.

ثابت می‌کنیم اگر در گروهی چهارتایی از ایستگاهها مانند A, B, C و D ایستگاهی مشکل آفرین یا تونل دوطرفه وجود نداشته باشد، این گروه همبند است. از ایستگاهی راه می‌افتیم و در امتداد تونلهای یک طرفه حرکت می‌کنیم تا دوباره به نقطه شروع حرکتان برگردیم. اگر از هر چهار ایستگاه گذشته باشیم که هیچ. در غیر این صورت باید از دقیقاً سه ایستگاه مانند A, B و C گذشته باشیم. از هر یک از این سه ایستگاه می‌توانیم به هر کدام دیگر برویم. اکنون توجه کنید که چون D مشکل آفرین نیست، بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود، می‌توانیم فرض کنیم که تونلی یک طرفه از A به D وجود دارد. بنابراین، می‌توانیم از هر ایستگاهی به D برویم. به همین ترتیب معلوم می‌شود که می‌توانیم از D به هر ایستگاهی برویم. بنابراین گروه موردنظر همبند است.

ایستگاهها را با ۱، ۲، ... و ۹۹ شماره‌گذاری کنید. به ازای $1 \leq i \leq 99$ فرض کنید a_i تونلی یک طرفه باشد که به ایستگاه i می‌رسد و b_i تونلی یک طرفه باشد که از این ایستگاه خارج می‌شود. ایستگاه i در $\binom{a_i}{3} + \binom{b_i}{3}$ گروه چهارتایی مشکل آفرین است. بنابراین ایستگاهها در کل در

$$\sum_{i=1}^{99} \left(\binom{a_i}{3} + \binom{b_i}{3} \right)$$

گروه مشکل آفرین‌اند. این مقدار برابر است با

$$\sum_{i=1}^{198} f(x_i)$$

که در آن $x_1, x_2, \dots, x_{198}$ عددهایی صحیح و غیرمنفی‌اند و

$$\sum_{i=1}^{198} x_i = 96 \times 99$$

بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که $x_1, x_2, \dots$ و x_k دست‌کم برابر با ۱‌اند و $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ و x_{198} برابر با صفرند. چون تابع f روی بازه $[1, +\infty)$ محدب

است، از نابرابری یسن نتیجه می‌شود که مجموع $f(x_i)$ ها دستکم برابر است با

$$k \binom{\frac{96 \times 99}{k}}{3}$$

همچنین، اگر $1 \leq m$ و $mx \geq 2$ ، آنگاه $mf(x) \geq f(mx)$ فرض کنید

$$m = \frac{k}{198}, \quad mx = \frac{96 \times 99}{198} = 48$$

پس مجموع مورد نظر دستکم $\binom{48}{3} 198$ است. چون هر گروه ناهمبند حداکثر دو ایستگاه مشکل‌آفرین دارد، حداقل $\binom{48}{3} 99$ گروه ناهمبند و حداکثر $\binom{48}{3} 99 - \binom{99}{2}$ گروه همبند وجود دارد.

ثابت می‌کنیم آرایشی وجود دارد که در آن $\binom{48}{3} 99 - \binom{99}{2}$ گروه همبند وجود دارد. ایستگاهها را دور دایره‌ای بچینید و میان هر دو ایستگاه مجاور تونلی دو طرفه قرار دهید. میان هر دو ایستگاه غیر مجاور مانند A و B تونلی از A به B قرار دهید، اگر و فقط اگر فاصله A از B در جهت ساعتگرد ۳، ۵، ... یا ۹۷ باشد. در این آرایش هر ایستگاه $\binom{48}{3} 2$ بار مشکل‌آفرین است. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که در این آرایش، هر گروه چهارتایی که شامل تونلی دو طرفه است همبند است. اکنون فرض کنید ایستگاه A در گروه چهارتایی A, B, C, D مشکل‌آفرین باشد، که در آن B در جهت ساعتگرد نزدیکترین ایستگاه به A و D در جهت ساعتگرد دورترین ایستگاه به A است. اگر از A به بقیه ایستگاهها تونلی دو طرفه وجود داشته باشد، سه تونل یک طرفه باید از ایستگاههای دیگر به D وجود داشته باشد و اگر سه تونل یک طرفه از دیگر تونلها به A وجود داشته باشد، سه تونل یک طرفه باید از B به ایستگاههای دیگر وجود داشته باشد. بنابراین هر گروه ناهمبند دقیقاً دو ایستگاه مشکل‌آفرین دارد. پس بنابر آنچه در بند قبل گفتیم، دقیقاً $\binom{48}{3} 99 - \binom{99}{2}$ گروه همبند وجود دارد.

مسأله ۴. فرض کنید m عددی طبیعی باشد. ثابت کنید عددهایی صحیح مانند a ، b و k وجود دارند که a و b هر دو فردند، k منفی نیست و

$$2m = a^{19} + b^{99} + k \times 2^{1999}$$

راه حل

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $\{t_1, \dots, t_n\}$ به پیمانه 2^n با $\{1, 3, 5, \dots, 2n-1\}$ برابر باشد، به ازای هر عدد طبیعی فرد مانند s ، $\{t_1^s, \dots, t_n^s\}$ هم چنین است. برای اثبات این مطلب توجه کنید که اگر $i \neq j$

$$t_i^s - t_j^s = (t_i - t_j)(t_i^{s-1} + t_i^{s-2}t_j + \dots + t_j^{s-1})$$

و چون $t_i^{s-1} + t_i^{s-1}t_j + \dots + t_j^{s-1}$ عددی فرد است، پس

$$t_i \equiv t_j \pmod{2^n}$$

اگر و فقط اگر

$$t_i^s \equiv t_j^s \pmod{2^n}$$

بنابراین عددی فرد مانند a وجود دارد که

$$2m - 1 \equiv a^{19} \pmod{2^{1999}}$$

پس اگر عدد منفی a را طوری انتخاب کنیم که

$$a \equiv a_0 \pmod{2^{1999}}$$

و

$$2m - 1 - a^{19} > 0$$

آنگاه جوابی برای معادله موردنظر به شکل زیر است

$$(a, b, k) = \left(a, 1, \frac{2m - 1 - a^{19}}{2^{1999}} \right)$$

مسئله ۵. بیشترین مقدار λ را طوری پیدا کنید که اگر ریشه‌های چندجمله‌ای درجه سوم

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

همگی نامنفی باشند، آنگاه به ازای هر عدد حقیقی و نامنفی مانند x ،

$$f(x) \geq \lambda(x - a)^3$$

در چه صورتی تساوی پیش می‌آید؟

راه حل

فرض کنید ریشه‌ها α ، β و γ باشند. می‌توانیم فرض کنیم $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$. اگر $x \geq 0$ ، می‌توان

نوشت

$$x - a = x + \alpha + \beta + \gamma \geq 0$$

و

$$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

اگر $0 \leq x \leq \alpha$ ، از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$-f(x) = (\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{27}(\alpha + \beta + \gamma - 3x)^3 \\ &\leq \frac{1}{27}(x + \alpha + \beta + \gamma)^3 = \frac{1}{27}(x - a)^3 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$f(x) \geq -\frac{1}{27}(x - a)^3$$

و تساوی وقتی پیش می‌آید که در نابرابری اول

$$\alpha - x = \beta - x = \gamma - x$$

و در نابرابری دوم

$$\alpha + \beta + \gamma - 3x = x + \alpha + \beta + \gamma$$

یعنی وقتی که $x = 0$ و $\alpha = \beta = \gamma$.اگر $\beta \leq x \leq \gamma$ ، از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} -f(x) &= (x - \alpha)(x - \beta)(\gamma - x) \leq \frac{1}{27}(x + \gamma - \alpha - \beta)^3 \\ &\leq \frac{1}{27}(x + \alpha + \beta + \gamma)^3 = \frac{1}{27}(x - a)^3 \end{aligned}$$

پس باز هم

$$f(x) \geq -\frac{1}{27}(x - a)^3$$

تساوی وقتی پیش می‌آید که در نابرابری اول

$$x - \alpha = x - \beta = \gamma - x$$

و در نابرابری دوم

$$x + \gamma - \alpha - \beta = x + \alpha + \beta + \gamma$$

یعنی وقتی که $\alpha = \beta = 0$ و $\gamma = 2x$.اگر $\alpha < x < \beta$ یا $x > \gamma$ ، آنگاه

$$f(x) > 0 \geq -\frac{1}{27}(x - a)^3$$

بنابراین بیشترین مقدار موردنظر برای λ برابر است با $-\frac{1}{27}$ ، چون در غیر این صورت نابرابری برای چند جمله‌ای $f(x) = x^3(x - 1)$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ درست نیست. تساوی وقتی پیش می‌آید که یا $\alpha = \beta = \gamma$ و $x = 0$ ، یا $\alpha = \beta = 0$ و $\gamma = 2x$ باشد و $x = \frac{\gamma}{2}$.

مسئله ۶. مکعبی $4 \times 4 \times 4$ از ۶۴ مکعب واحد تشکیل شده است. وجه‌های ۱۶ تا از این مکعبها را قرمز می‌کنیم. رنگ‌آمیزی را جالب می‌نامیم، هرگاه در هر جعبه مستطیلی $4 \times 1 \times 1$ که از ۴ مکعب واحد تشکیل شده است فقط یک مکعب قرمز وجود داشته باشد. تعداد رنگ‌آمیزیهای جالب را پیدا کنید (اگر حتی بتوان رنگ‌آمیزی را با یک سری دوران از رنگ‌آمیزی دیگری به دست آورد، این دو متمایزند).

راه حل

یکی از وجه‌ها را به عنوان وجه زیرین انتخاب کنید. به ازای هر مربع واحد مانند A روی این وجه، جعبه $4 \times 1 \times 1$ عمودی را در نظر می‌گیریم که کف آن A است. اگر i امین مکعب (با شمارش از A) رنگی باشد، روی A عدد i را بنویسید. به این ترتیب، هر رنگ‌آمیزی جالب به طور یک به یک به مربع لاتینی 4×4 روی وجه زیرین نگاشته می‌شود. (در هر مربع لاتین $n \times n$ هر یک از نمادهای $a_1, \dots, a_n$ در هر سطر و هر ستون دقیقاً یک بار آمده است.) برعکس، اگر مربع لاتینی 4×4 مفروض باشد، می‌توانیم به روش عکس، رنگ‌آمیزی جالب به دست آوریم. بنابراین، برای حل مسئله باید تعداد مربعهای لاتین 4×4 متمایز را حساب کنیم.

توجه کنید که با عوض کردن سطرهاى مربعی لاتین، مربع لاتین دیگری به دست می‌آید. بنابراین اگر نمادها a, b, c و d باشند، هر یک از $4! \times 3 \times 2 \times 1$ آرایش سطر اول و ستون اول نظیر یک تعداد مربع لاتین‌اند. بنابراین $4! \times 3 \times 2 \times 1$ مربع لاتین 4×4 وجود دارد، که در اینجا x تعداد مربعهای لاتینی است که در سطر اول و ستون اول آنها نمادهای a, b, c و d به همین ترتیب آمده‌اند. درایه‌های سطر دوم و ستون دوم a, c یا d ‌اند و در نتیجه مربعهای لاتین زیر به وجود می‌آیند

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & b & a \\ d & c & a & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & d & a & c \\ c & a & d & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix}$$

بنابراین $x = 4$ و تعداد رنگ‌آمیزیهای جالب، $4 \times 3! \times 4!$ یا ۵۷۶ است.

پانزدهمین المپیاد ریاضی چین، ۲۰۰۰

مسألهٔ ۱. در مثلث ABC ، $BC \leq CA \leq AB$. فرض کنید R و r به ترتیب شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشند. برحسب مقدار $\angle C$ مشخص کنید که $BC + CA - 2R - 2r$ چه وقت مثبت، منفی یا صفر است.

راه حل

فرض کنید

$$AB = c, \quad BC = a, \quad CA = b$$

$$\angle A = 2x, \quad \angle B = 2y, \quad \angle C = 2z$$

در این صورت $0^\circ < x \leq y \leq z = 90^\circ$. فرض کنید

$$s = BC + CA - 2R - 2r = a + b - 2R - 2r$$

با استفاده از تساویهای

$$2R = \frac{a}{\sin 2x} = \frac{b}{\sin 2y} = \frac{c}{\sin 2z}$$

$$r = 4R \sin x \sin y \sin z$$

به دست می آید

$$s = 2R(\sin 2x + \sin 2y - 1 - 4 \sin x \sin y \sin z)$$

توجه کنید که اگر $\angle C = 90^\circ$ ، آنگاه $2R = c$ و $2r = a + b - c$ و در نتیجه $s = 0$. فرض کنید زاویه C قائمه نباشد. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \frac{s}{2R} &= 2 \sin(x+y) \cos(x-y) - 1 + 2(\cos(x+y) - \cos(x-y)) \sin z \\ &= 2 \cos z \cos(x-y) - 1 + 2(\sin z - \cos(x-y)) \sin z \\ &= 2 \cos(x-y)(\cos z - \sin z) - \cos 2z \\ &= 2 \cos(y-x) \frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z + \sin z} - \cos 2z \\ &= \left(\frac{2 \cos(y-x)}{\cos z + \sin z} - 1 \right) \cos 2z \end{aligned}$$

(توجه کنید که چون $0^\circ < z < 90^\circ$ ، $\cos z + \sin z$ مخالف صفر است.)
توجه کنید که

$$0^\circ \leq y - x < \min\{y, x + y\} \leq \min\{z, 90^\circ - z\}$$

چون $90^\circ < z$ و $90^\circ - z < 90^\circ$ ، پس

$$\begin{aligned} \cos(y-x) &> \max\{\cos z, \cos(90^\circ - z)\} \\ &= \max\{\cos z, \sin z\} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{2 \cos(x-y)}{\cos z + \sin z} - 1 > 0.$$

پس برحسب اینکه $\angle C < 90^\circ$ ، $\angle C = 90^\circ$ یا $\angle C > 90^\circ$ ، s به ترتیب مثبت، صفر یا منفی است.

مسأله ۲. دنباله $\{a_n\}$ این‌طور تعریف شده است: $a_1 = 0$ ، $a_2 = 1$ و اگر $n \geq 3$

$$a_n = \frac{1}{2} n a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_{n-2} + (-1)^n \left(1 - \frac{n}{2}\right)$$

دستوری صریح برای

$$a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + 3 \binom{n}{2} a_{n-2} + \cdots + n \binom{n}{n-1} a_1$$

پیدا کنید.

راه حل

عبارت موردنظر را f_n بنامید. رابطه بازگشتی موردنظر را به شکل

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{4}na_{n-1} + \frac{1}{4}n\left((-1)^{n-1} + (n-1)a_{n-2}\right)$$

بنویسید. از استقرایی ساده معلوم می شود که

$$a_n = (-1)^n + na_{n-1}$$

و در نتیجه

$$a_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

بنابراین، a_n تعداد پریشهای $(1, 2, \dots, n)$ است، یعنی برابر است با تعداد جایگشتهایی از این n تایی که هیچ نقطه ثابتی ندارند.

به هر زوج مانند (σ, j) از جایگشت غیرهمانی σ و عدد j در مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ ، اگر j نقطه ثابتی از σ نبود، علامتی نسبت دهید. اگر k عددی ثابت (از میان عددهای $1, 2, \dots, n$) باشد، $a_k \binom{n}{n-k}$ جایگشت مانند σ وجود دارند که دقیقاً $n-k$ نقطه ثابت دارند: $\binom{n}{n-k}$ انتخاب برای نقطه های ثابت و a_k پریش برای k نقطه دیگر وجود دارد. به ازای هر یک از این جایگشتها مانند σ ، دقیقاً به $n-k$ زوج مانند (σ, j) یک علامت نسبت داده شده است. با احتساب همه جایگشتها، معلوم می شود که تعداد علامتهای نسبت داده شده برابر است با

$$\sum_{k=1}^n (n-k) \binom{n}{n-k} a_k = f_n - \sum_{k=1}^n \binom{n}{n-k} a_k = f_n - (n! - 1)$$

توجه کنید که $\sum_{k=1}^n \binom{n}{n-k} a_k$ برابر است با تعداد جایگشتهایی که کمتر از n نقطه ثابت دارند، یعنی برابر است با $n! - 1$.

از طرف دیگر، به ازای هر j در مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ ، دقیقاً $1 - (n-1)!$ جایگشت غیرهمانی وجود دارند که j را ثابت نگه می دارند. بنابراین تعداد علامتهای نسبت داده شده برابر است با

$$\sum_{j=1}^n ((n-1)! - 1) = n(n-1)! - n$$

بنابراین $f_n = 2n! - n - 1$.

مسئله ۳. یک باشگاه تنیس روی میز می خواهد یک دوره مسابقات دو نفره برگزار کند، یعنی یک سری مسابقه که در هر یک دو نفر بازیکن با دو نفر دیگر مسابقه می دهند. تعداد بازیهای هر بازیکن در

این دوره، تعداد بازیهایی است که در آنها شرکت کرده است. مجموعه $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ از عددهای طبیعی متمایز که هر کدام بر ۶ بخش پذیر است مفروض است. کمترین تعداد بازیکنانی را پیدا کنید که می توان در میان آنها یک دوره مسابقات دو نفره ترتیب داد به طوری که

(الف) هر دو تیم دونفره مختلف حداکثر یک بار با هم بازی کنند.

(ب) اگر دو بازیکن عضو یک تیم دونفره باشند، هیچگاه در مقابل هم بازی نکنند.

(د) مجموعه تعداد بازیهای بازیکنان مجموعه A باشد.

راه حل

لم. فرض کنید $1 \leq k$ و $b_1 < b_2 < \dots < b_k$ در این صورت گرافی $b_k + 1$ رأسی وجود دارد که مجموعه درجه رأسهای آن $\{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ است.

برهان. حکم را به استقرای قوی روی k ثابت می کنیم. اگر $k = 1$ ، گراف کامل $b_1 + 1$ رأسی ویژگیهای موردنظر را دارد. اگر $k = 2$ ، $b_2 + 1$ رأس در نظر بگیرید، b_1 رأس انتخاب کنید و دو رأس را به هم وصل کنید اگر و فقط اگر یکی از آنها یکی از این b_1 رأس باشد.

اکنون ثابت می کنیم که اگر حکم به ازای هر $k, k < i$ ، درست باشد، به ازای $k = i, i \geq 3$ ، هم درست است. $b_i + 1$ رأس در نظر بگیرید و آنها را به سه مجموعه مانند S_1, S_2 و S_3 طوری افزایش دهید که

$$|S_1| = b_1$$

$$|S_2| = b_{i-1} - b_1 + 1$$

$$|S_3| = b_i - (b_{i-1} + 1)$$

بنابر فرض استقرا می توانیم طوری یالهایی بین رأسهای مجموعه S_2 رسم کنیم که مجموعه درجه رأسهای $\{b_2 - b_1, \dots, b_{i-1} - b_1\}$ باشد. سپس همه رأسهایی را رسم کنید که رأسی از S_1 یکی از دو سر آن باشد. در این صورت درجه هر رأس در S_1 برابر با b_i است، درجه هر رأس در S_3 برابر با b_1 است و مجموعه درجه رأسهای S_2 مجموعه $\{b_2, \dots, b_{i-1}\}$ است. بنابراین، مجموعه درجه $b_i + 1$ رأس گراف موردنظر مجموعه $\{b_1, b_2, \dots, b_i\}$ است. اثبات کامل شده است.

فرض کنید طوری مسابقات را بین n نفر ترتیب داده باشیم که شرطهای موردنظر برقرار باشند. تعداد بازیهای دستکم یکی از بازیکنان، مثلاً X ، برابر با $\max(A)$ است. فرض کنید تعداد تیمهای دونفره مختلفی که او با آنها بازی کرده است برابر با m باشد. هر یک از این تیمها دو نفر بازیکن دارد، پس در کل $2m$ بازیکن دارند. در این شمارش هر بازیکن حداکثر دوبار شمرده شده است، زیرا هر بازیکن عضو حداکثر دو تیم است، بنابراین بازیکن X باید دستکم با m بازیکن بازی کرده باشد. اگر X در j تیم عضو باشد (که j یا ۱ است یا ۲)، در کل دستکم $1 + j + m$ بازیکن داریم. همچنین، X در

دست کم jm بازی شرکت کرده است، و در نتیجه $jm \geq \max(A)$. بنابراین

$$n \geq m + j + 1 \geq \frac{1}{j} \max(A) + j + 1 \geq \min\{\max(A) + 2, \frac{1}{j} \max(A) + 3\}$$

چون $\max(A) \geq 6$ ، پس

$$\max(A) + 2 > \frac{1}{j} \max(A) + 3$$

$$n \geq \frac{1}{j} \max(A) + 3$$

ثابت می‌کنیم می‌توان مسابقات را طوری ترتیب داد که $n = \frac{1}{j} \max(A) + 3$. بنابر لم می‌توانیم گرافی مانند G با $\frac{1}{j} \max(A) + 1$ رأس رسم کنیم که مجموعه درجه رأسهایش $\{\frac{a_1}{j}, \frac{a_2}{j}, \dots, \frac{a_k}{j}\}$ باشد. n بازیکن را به $\frac{1}{j} \max(A) + 1$ گروه سه‌تایی تقسیم کنید و فرض کنید دو بازیکن وقتی و فقط وقتی در یک تیم هستند که در یک سه‌تایی قرار داشته باشند. هر سه‌تایی (و سه زوجی که از بازیکنان آن تشکیل شده‌اند) را به زوجی از G نسبت دهید و فرض کنید که دو تیم با هم مسابقه می‌دهند اگر و فقط اگر رأسهای نظیرشان مجاور باشند. فرض کنید زوجی داریم که به رأسی مانند v با درجه $\frac{a_i}{j}$ نسبت داده شده است. به ازای هر $\frac{a_i}{j}$ رأس مانند w که مجاور v هستند، این زوج با سه زوجی که به w نسبت داده شده‌اند مسابقه داده است، پس این زوج در کل $\frac{a_i}{j}$ مسابقه داده است. هر بازیکنی که به v نسبت داده شده است در دو زوج حضور دارد و در نتیجه تعداد بازیهای برابر با $2 \left(\frac{a_i}{j}\right)$ یا a_i است. بنابراین مجموعه بازیهای بازیکنان برابر با $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ است.

مسأله ۴. عدد طبیعی n مفروض است و $n \geq 2$. به ازای هر n تایی مرتب از عددهای حقیقی مانند $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، فرض کنید نمرة تسلط A تعداد عددهایی مانند k در مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ باشد که به ازای هر j که $1 \leq j \leq k$ ، $a_k > a_j$. همه جایگشتهای $(1, 2, \dots, n)$ مانند $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ را در نظر بگیرید که نمرة تسلط آنها ۲ است. میانگین حسابی عضوهای اول این جایگشتها (یعنی میانگین حسابی a_1 ها) را پیدا کنید.

راه حل

در هر n تایی مرتب از عددهای حقیقی مانند $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ، اگر به ازای هر j ، $1 \leq j \leq k$ ، a_j از a_k بزرگتر باشد، a_k را حاکم می‌نامیم. اگر نمرة تسلط جایگشتی مانند $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ از $(1, 2, \dots, n)$ برابر با ۲ باشد، آن وقت حاکمان باید a_1 و n باشند، که در اینجا به ازای k ای که $n = a_k$ ، $2 \leq k \leq n$.

عددی ثابت مانند m در مجموعه $\{1, 2, \dots, n-1\}$ در نظر بگیرید. عددهای $m+1$ و $m+2$ ، n را بزرگ و عددهای $1, 2, \dots, m-1$ را کوچک می‌نامیم. در جایگشتی که دو

حاکم دارد و در آن $a_1 = m$ باید جایی پیش از همهٔ عددهای بزرگ دیگر بیاید. بنابراین، برای تشکیل همهٔ این جایگشتها، ابتدا $n - m$ جایی را که باید عددهای بزرگ قرار بگیرند انتخاب می‌کنیم، n را در اولین جای انتخاب شده قرار می‌دهیم و سپس $n - m - 1$ عدد بزرگ دیگر را در جاهای انتخاب شدهٔ باقی‌مانده قرار می‌دهیم. بعد همهٔ عددهای کوچک را در $m - 1$ جای باقی‌مانده قرار می‌دهیم. به این ترتیب تعداد این جایگشتها برابر است با

$$x_m = \binom{n-1}{m-1} (n-m-1)! (m-n)! = \frac{(n-1)!}{n-m}$$

بنابراین میانگین حسابی موردنظر برابر است با

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{m=1}^{n-1} m x_m}{\sum_{m=1}^{n-1} x_m} &= \frac{(n-1)! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m}{n-m}}{(n-1)! \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{n-m}} \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{m}{n-m}}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{n-m}} \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{n-m}{m}}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}} \\ &= \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{n}{m} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m}{m}}{\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}} \\ &= n - \frac{n-1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}} \end{aligned}$$

مسألهٔ ۵. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که عددهایی طبیعی مانند $n_1, n_2, \dots$ و n_k همگی بزرگتر از ۳ وجود داشته باشند که

$$n = n_1 n_2 \dots n_k = 2^{\frac{1}{k}((n_1-1)(n_2-1)\dots(n_k-1))} - 1$$

راه حل

اگر عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد، عددی طبیعی مانند m وجود دارد که $n = 2^m - 1$. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که تنها عدد کوچکتر از 10 مانند m که $n = 2^m - 1$ و n ویژگی موردنظر را داشته باشد ۳ است.

ثابت می‌کنیم که اگر $m \geq 1$ ، ویژگی موردنظر را ندارد. فرض کنید چنین نباشد و به‌ازای عددهایی صحیح مانند $n_1, n_2, \dots, n_k$

$$m = \frac{1}{k}(n_1 - 1)(n_2 - 1) \cdots (n_k - 1) \geq 1.$$

توجه کنید که اگر $l \geq 1$ ، آنگاه

$$\left(\frac{l+1}{l}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2$$

با استفاده از این مطلب، به‌سادگی می‌توان به استقرا ثابت کرد که اگر l عددی طبیعی باشد و $l \geq 1$ ، آنگاه $l^3 - 1 > 2^l$. بنابراین

$$2^m - 1 > m^3 = \left(\frac{n_1 - 1}{2}\right)^3 \left(\frac{n_2 - 1}{3}\right)^3 \cdots \left(\frac{n_k - 1}{2}\right)^3 \quad (*)$$

چون $2^m - 1$ فرد است، پس n_i ها همگی فردند و چون هر یک از n_i ها از ۳ بزرگتر است، پس هریک از آنها دست‌کم ۵ است. بنابراین

$$\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^2 \geq 4 \frac{n_i - 1}{2} > n_i, \quad 1 \leq i \leq k \quad (**)$$

به این ترتیب، از (*) و (**) نتیجه می‌شود

$$n = 2^m - 1 > n_1 n_2 \cdots n_k = n$$

که درست نیست. پس تنها عددی که ویژگی موردنظر را دارد ۷ است.

مسأله ۶. یک برگهٔ امتحانی شامل ۵ سؤال چندگزینه‌ای است که هر کدام چهارگزینهٔ مختلف دارد. ۲۰۰۰ دانش‌آموز در امتحان شرکت کرده‌اند و هر دانش‌آموز فقط یکی از گزینه‌های هر سؤال را انتخاب می‌کند. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که در میان برگه‌های امتحانی هر n دانش‌آموز، ۴ برگه وجود داشته باشد که در هر دوتا از آنها حداکثر سه پاسخ یکسان باشند.

راه‌حل

فرض کنید عدد طبیعی n ویژگی موردنظر را داشته باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم $n \geq 25$. فرض کنید ۱، ۲، ۳ و ۴ چهارگزینهٔ مختلف هر سؤال باشند. برگهٔ جواب هر دانش‌آموز را با پنج‌تایی مرتب a_i نشان دهید که در آن $a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ و پاسخ دانش‌آموز به سؤال i ام a_i است. می‌گوییم دو برگهٔ جواب از یک نوع‌اند، هرگاه پنج‌تاییهای نظیر آنها متعلق به مجموعه‌ای به شکل

$$\{(k, a_2, a_3, a_4, a_5) : k \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

باشند، که در اینجا

$$a_2, a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 3, 4\}$$

چون ۲۵۶ مجموعهٔ این‌چنینی وجود دارد و $208 = 256 \times 7 + 200$ ، بنابراین اصل لانه کبوتری، دست‌کم هشت برگهٔ جواب از یک نوع‌اند. در میان ۱۹۹۲ برگهٔ جواب باقی‌مانده هم هشت‌تا از یک نوع‌اند و سرانجام، از میان ۱۹۸۴ برگهٔ جواب باقی‌مانده هم هشت‌تای دیگر از یک نوع‌اند. فرض کنید A مجموعهٔ این ۲۴ برگهٔ جواب باشد. از هر چهار برگهٔ جواب در A ، دوتا باید از یک نوع باشند، یعنی جوابهای ۴ تا سؤال آخر آنها یکسان است. این نتیجه با این فرض که ۴ برگهٔ امتحانی در A وجود دارند که هر دوتا از آنها حداکثر ۳ جواب یکسان دارند تناقض دارد. بنابراین $n \geq 25$. اکنون ثابت می‌کنیم که اگر $n = 25$ ، آن‌وقت n ویژگی موردنظر را دارد. فرض کنید

$$S = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) : \sum_{i=1}^5 a_i \equiv 0 \pmod{4}, a_i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$$

که در این صورت $|S| = 4^4 = 256$ ، و اگر پنج‌تایی نظیر دو برگهٔ جواب عضوهای متمایزی از S باشند، حداکثر ۳ پاسخ یکسان دارند. ۲۵ عضو از S انتخاب کنید و فرض کنید دقیقاً هشت دانش‌آموز برگه‌های جوابی را تحویل داده باشند که نظیر هر یک از این ۲۵ پنج‌تایی هستند. از میان هر ۲۵ برگهٔ جواب (چون $25 > 3 \times 8$)، چهار برگه وجود دارند که پنج‌تاییهای نظیرشان عضوهای متمایزی از S هستند و در شرطهای مسأله صدق می‌کنند.

منابع

1. Li Cheung-Zhang; Zhang Zhu-Sheung, *Chinese Mathematical Olympiads 1986-1993*. Chiu Chang Math. Publishing, 1994.
2. The 1994 Chinese Mathematical Olympiad, *Mathematics Competitions*, Vol 9, No 1, 1996, pp. 40-47.
3. Andreescu, T.; Kedlaya, K.; Zeitz, P., *Mathematical Contests 1995-1996*, AMC, 1997.
4. Andreescu, T.; Kedlaya, K.; *Mathematical Contests 1996-1997*, AMC, 1998.
5. Andreescu, T.; Kedlaya, K.; *Mathematical Contests 1997-1998*, AMC, 1999.
6. Andreescu, T.; Feng, Z., *Mathematical Olympiads 1998-1999*, AMC, 2000.
7. Andreescu, T.; Feng, Z., *Mathematical Olympiads 1999-2000*, MAA, 2001.
8. Andreescu, T.; Feng, Z., Lee, G., *Mathematical Olympiads 2000-2001*, MAA, 2003.