

متغیر: حرف‌هایی را که برای بیان عددهای نامعلوم به کار می‌روند، متغیر می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر طول ضلع یک مربع را با a نشان دهیم، آن‌گاه محیط مربع برابر $4 \times a$ است. حرف a یک متغیر است.

۱ با توجه به شکل زیر و الگوی آن، جدول زیر را کامل کنید.



شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد دایره‌ها						

پاسخ: در شکل (۱)، ۳ دایره، در شکل (۲)، ۶ دایره و در شکل (۳)، ۹ دایره وجود دارد. به صورت روبه‌رو است:

با توجه به این‌که شماره شکل را با حرف n نشان داده‌ایم، تعداد دایره‌ها در شکل n م برابر $3 \times n$ خواهد بود و جدول به صورت زیر درمی‌آید:

شماره شکل	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد دایره‌ها	۳	۶	۹	۱۲	...	$3 \times n$

نکته علامت $(\times)$ را می‌توان بین عدد و متغیر حذف کرد.

به عنوان مثال، به جای $3 \times n$ می‌توانیم بنویسیم $3n$

۲ ابتدا سه عدد بعدی هر الگو را بنویسید، سپس جمله n ام الگو را مشخص کنید.

(ب) $2, 3, 4, 5, \dots$

(ب) $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$n+1 = \text{جمله } n\text{ام}$

(آ) $4, 8, 12, 16, \dots$

پاسخ: (آ) $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28$

$4n = \text{جمله } n\text{ام}$

نکته در الگوهایی که اختلاف بین جملات متوالی ثابت است، جمله n ام را می‌توان با دستور زیر به دست آورد:

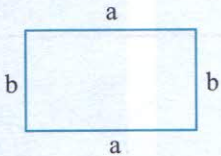
(اختلاف - عدد اول) $+ n \times \text{اختلاف} = \text{جمله } n\text{ام}$

$3 - 5n = \text{جمله } n\text{ام} \Rightarrow 5 \times n + (2 - 5) = 5n - 3 = \text{اختلاف جمله‌ها}$

به عنوان مثال، در الگوی $2, 7, 12, \dots$ داریم:

گاهی اوقات نیاز است که از بیش از یک متغیر استفاده کنیم:

اگر در یک مستطیل طول را با a و عرض را با b نشان دهیم، آن‌گاه با توجه به این‌که اندازه ضلع‌های روبه‌رو در مستطیل با هم برابرند، مستطیل با متغیرها به صورت مقابل است:

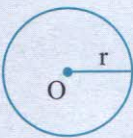


اگر بخواهیم محیط (P) و مساحت (S) مستطیل را با متغیرها نشان دهیم، به صورت $P = a + b + a + b$ و $S = a \times b = ab$ خواهند بود.

۳ محیط و مساحت دایره را با استفاده از متغیرها نشان دهید.

پاسخ: فرض کنیم شعاع دایره r باشد، در این صورت:

اگر مساحت دایره را با S نشان دهیم، آن‌گاه:



$$S = 3/14 \times \text{شعاع} \times \text{شعاع} = 3/14 \times r \times r$$

و اگر محیط دایره را با P نشان دهیم، آن‌گاه طبق شکل داریم:

$$P = 3/14 \times \text{قطر دایره} = 3/14 \times (2r) = 6/28 \times r$$

عبارت‌های جبری - مقدار عددی یک عبارت جبری

عبارت‌های جبری

عبارت جبری: هر عبارت جبری شامل یک یا چند عدد، متغیر و عمل‌هایی مثل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است. به عنوان مثال، عبارت‌های روبه‌رو همگی عبارت‌های جبری می‌باشند:

$$4x, 5x - y, 2x \times (11y), \frac{x+y}{a}, 5 + \frac{2x}{y}$$

تذکره: در یک عبارت جبری، اغلب از علامت « $\cdot$ » یا پرانتز برای حاصل ضرب بین متغیرها استفاده می‌شود و از نماد « $\times$ » پرهیز می‌شود. در زیر، حاصل ضرب دو متغیر x و y به صورت‌های مختلف نمایش داده شده است که همگی آن‌ها، یکسان‌اند و هیچ فرقی با هم ندارند:

$$xy, x \cdot y, x(y), (x)y, (x)(y)$$

یک جمله‌ای: هر یک از عبارت‌های $x, -4xy, 12xyz$ و ... را که از حاصل ضرب عدد در متغیر(ها) تشکیل شده است، یک جمله‌ای می‌گوییم.

عبارت‌های $x+2, 3x-1$ و $\frac{x}{y}$ یک جمله‌ای نمی‌باشند، زیرا در $x+2$ از علامت جمع و در $3x-1$ از علامت تفریق بین متغیر و عدد و در عبارت $\frac{x}{y}$ از علامت تقسیم بین دو متغیر استفاده شده است.

نکته: یک جمله‌ای‌ها از دو قسمت متغیر و ضریب عددی تشکیل می‌شوند.

به عنوان مثال در یک جمله‌ای $\frac{11}{3}x$ ، ضریب عددی $\frac{11}{3}$ و متغیر x است.

تذکره: ضریب عددی یک جمله‌ای x ، برابر یک و ضریب عددی یک جمله‌ای $-x$ ، برابر -1 است.

نکته: همه اعداد، یک جمله‌ای می‌باشند.

به عنوان مثال، اعداد $0, -7$ و 28 همگی یک جمله‌ای هستند.

ضرب عدد در یک جمله‌ای

برای ضرب عدد در یک جمله‌ای، فقط عدد را در ضریب یک جمله‌ای ضرب می‌کنیم و قسمت متغیرها همان‌طور باقی می‌ماند.

مثال: $-4 \times (5x) = (-4 \times 5)x = -20x$

ضرب عدد در یک پرانتز

برای ضرب عدد در یک پرانتز، باید عدد را در تمام یک جمله‌ای‌های پرانتز ضرب کرد.

مثال: $3(4x - 5y + 1) = 3 \times 4x + 3 \times (-5y) + 3 \times 1 = 12x - 15y + 3$

یک جمله‌ای‌های متشابه: اگر قسمت حرفی یک جمله‌ای‌ها یکسان باشند، یک جمله‌ای‌ها را متشابه می‌گویند.

به عنوان مثال، یک جمله‌ای‌های $4x$ و $-12x$ متشابه‌اند زیرا قسمت حرفی هر دو x است. ولی یک جمله‌ای‌های $2x$ و y با هم متشابه نمی‌باشند زیرا قسمت حرفی متمایزی دارند.

ساده کردن عبارت‌های جبری

برای ساده کردن عبارت‌های جبری، فقط جمله‌های متشابه را با هم در نظر می‌گیریم و آن‌ها را با هم جمع یا از هم تفریق می‌کنیم. برای جمع و تفریق دو یک جمله‌ای متشابه، فقط ضرایب عددی آن‌ها را با هم جمع و یا تفریق می‌کنیم و یکی از متغیرها را می‌نویسیم.

مثال: $6a + 8a = (6 + 8)a = 14a$, $11a - 17a = (11 - 17)a = -6a$

نکته: در ساده کردن عبارت‌های جبری، از خاصیت جابه‌جایی جمع و ضرب، خاصیت شرکت‌پذیری ضرب و بی‌اثر بودن پرانتز در ضرب، یعنی $a(bc) = (ab)c$ استفاده می‌شود.

۴ عبارتهای جبری زیر را ساده کنید.

ب) $2x - 1 - 7x + 11 + 5y$

آ) $4a - 3b + 11a + b$

✓ پاسخ: آ) $4a$ و $11a$ با هم متشابه و $-3b$ و b نیز با هم متشابه‌اند، داریم:

$$4a - 3b + 11a + b = \underbrace{4a + 11a}_{15a} - \underbrace{3b + b}_{-2b} = (4+11)a + (-3+1)b = 15a - 2b$$

ب) عبارت‌های $2x$ و $-7x$ با هم و -1 و 11 با هم متشابه‌اند و $5y$ با هیچ‌یک از آن‌ها متشابه نمی‌باشد، پس با هیچ‌یک از آن‌ها جمع

و تفریق نمی‌شود. داریم:

$$2x - 1 - 7x + 11 + 5y = 2x - 7x - 1 + 11 + 5y = \underbrace{(2-7)x}_{-5x} + \underbrace{(-1+11)}_{10} + 5y = -5x + 10 + 5y$$

مقدار عددی یک عبارت جبری

در یک عبارت جبری اگر به جای متغیر یا متغیرهای آن، عدد یا عددهای معینی قرار دهیم، مقدار عددی عبارت به ازای آن عدد (اعداد) به دست می‌آید.

۵ مقدار عددی عبارت‌های جبری زیر را به ازای مقدارهای داده شده به دست آورید.

ب) $(3x - 4y) - (5x + 2y)$ ، $x = 4, y = 5$

آ) $4a - 7b$ ، $a = 2, b = -1$

$4a - 7b = 4(2) - 7(-1) = 8 + 7 = 15$

✓ پاسخ: آ)

ب) ابتدا عبارت جبری را ساده کرده و سپس مقدارهای داده شده را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$(3x - 4y) - (5x + 2y) = 3x - 4y + (-1) \times 5x + (-1) \times 2y = 3x - 4y - 5x - 2y$$

$$= 3x - 5x - 4y - 2y = (3 - 5)x + (-4 - 2)y = -2x - 6y \xrightarrow{x=4, y=5} -2(4) - 6(5) = -8 - 30 = -38$$

معادله: به یک تساوی جبری که به ازای بعضی از عددها به تساوی عددی تبدیل می‌شود، معادله می‌گویند. به عنوان مثال $5x = 11$ و $24 = 3 - 4x$ معادله‌اند.

جواب‌های معادله همان عددهایی هستند که تساوی عددی را برقرار می‌کنند.

حل معادله

برای حل معادله مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

(۱) متغیرها را به یک طرف تساوی و اعداد را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم (وقتی که یک عبارت را به طرف دیگر تساوی می‌بریم، آن را قرینه می‌کنیم).

(۲) دو طرف تساوی را ساده می‌کنیم.

(۳) دو طرف تساوی را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

تذکره جهت اطمینان یافتن از این که جواب به دست آمده درست است یا نه، کافی است جواب را در معادله جای گذاری کنیم و چنانچه تساوی برقرار شود، جواب درست و در غیر این صورت جواب نادرست است.

۶ معادله‌های زیر را حل کنید.

(پ) $3x - 3 = x + 1$

(ب) $5 - x = 11$

(آ) $2x + 4 = 8$

$2x + 4 = 8 \Rightarrow 2x = 8 - 4 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

✓ پاسخ: (آ)

$5 - x = 11 \Rightarrow -x = 11 - 5 \Rightarrow -x = 6$ ضریب x برابر -1 است. $\rightarrow x = \frac{6}{-1} = -6$

(ب)

$3x - 3 = x + 1 \Rightarrow 3x - x = 1 + 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$

(پ)

۷ معادله $\frac{2x+1}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{5}$ را حل کنید.

✓ پاسخ: هرگاه در یک معادله با بیش از یک کسر سروکار داشته باشیم، می‌توانیم با ضرب دو طرف معادله در عددی که بر تمام اعداد موجود در مخرج بخش‌پذیر است، مخرج‌ها را از بین برده و سپس معادله را مانند گذشته حل کنیم. در این معادله برای از بین بردن مخرج‌ها، دو طرف معادله را در عدد $3 \times 4 \times 5 = 60$ ضرب می‌کنیم، داریم:

$\frac{20}{60} \times \frac{2x+1}{3} - \frac{15}{60} \times \frac{x}{4} = \frac{12}{60} \times \frac{1}{5} \Rightarrow 20(2x+1) - 15x = 12$

$\Rightarrow 40x + 20 - 15x = 12 \Rightarrow 25x = 12 - 20 = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{25}$

۸ اگر $x = 2$ جواب معادله $4x + a = 11$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

✓ پاسخ: چون $x = 2$ جواب معادله است، پس با جای گذاری 2 به جای x در معادله، تساوی برقرار است، پس داریم:

$4(2) + a = 11 \Rightarrow 8 + a = 11 \Rightarrow a = 11 - 8 \Rightarrow a = 3$

کاربرد معادله

در فصل اول برای حل مسائل به روش نمادین از ،  و ... استفاده می‌کردیم. در این قسمت با قرار دادن یک مجهول به جای ،  و ... مسأله را به یک معادله تبدیل می‌کنیم و سپس معادله را حل می‌کنیم.

نکته برای حل مسأله به کمک معادله، ابتدا باید خواسته مسأله (مجهول) را با یک متغیر نشان دهیم، سپس مسأله را تبدیل به یک معادله کنیم و با حل معادله، مجهول را به دست آوریم.

۹ اگر از پنج برابر عددی، ۲ واحد کم کنیم، حاصل ۲۳ می‌شود. آن عدد را پیدا کنید.

پاسخ: فرض کنیم عدد مجهول n باشد. در این صورت پنج برابر عدد به صورت $5n$ می‌باشد و اگر ۲ واحد از آن کم کنیم، عبارت به صورت $5n - 2$ درمی‌آید. بنابر فرض، معادله‌ای به صورت $5n - 2 = 23$ خواهیم داشت:

$$5n - 2 = 23 \Rightarrow 5n = 23 + 2 \Rightarrow 5n = 25 \Rightarrow n = \frac{25}{5} = 5$$

حل معادله

۱۰ علی و حسن ۲۰ کت دوخته‌اند. علی، ۶ کت بیشتر از حسن دوخته است.

هر کدام از آن‌ها چند کت دوخته‌اند؟



پاسخ: ☒

$x + 6$: تعداد کت‌های دوخته شده توسط علی $\Rightarrow x$: تعداد کت‌های دوخته شده توسط حسن

$$x + (x + 6) = 20 \Rightarrow 2x + 6 = 20 \Rightarrow 2x = 20 - 6 = 14 \Rightarrow x = \frac{14}{2} = 7$$

طبق فرض مجموع باید ۲۰ شود، پس داریم:

پس حسن ۷ کت و علی $7 + 6 = 13$ کت دوخته‌اند.