

جمع و تفریق اعداد تواندار :

در جمع و تفریق اعداد تواندار برای $a^m + a^n$ و یا $a^m - a^n$ و $a^n + b^n$ و $a^n - b^n$ قاعده خاصی وجود ندارد و باید جداگانه هر قسمت را حساب کنیم .

مثال : $2^2 + 2^3 = 4 + 8 = 12$ و $2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$

$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$ و $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

* نکته ۱: ولی برای $a^n + a^n$ می توان حاصل جمع را به حاصل ضرب (یعنی دو جمله متشابه) تبدیل کرد .

مثال : $a^n + a^n = 2a^n$

$2^4 + 2^4 = 2 \times 2^4 = 2^5$

$3^x + 3^x + 3^x = 3 \times 3^x = 3^{1+x}$

📖 تستهای مربوطه :

۱ - حاصل عبارت $2^5 + 2^5 + 2^5 + 2^5$ کدام است ؟

(۱) 2^{20} (۲) 2^7 (۳) 8^5 (۴) 8^{20}

۲ - حاصل عبارت $4^7 + 4^7 + 4^7 + 4^7$ چقدر است ؟

(۱) 6^{28} (۲) 4^{28} (۳) 4^7 (۴) 4^8

۳ - حاصل عبارت $(3^5 + 2^5)(2^5 + 2^5 + 2^5)$ کدام است ؟

(۱) 6^6 (۲) 2^6 (۳) 3^6 (۴) 72^5

۴ - حاصل عبارت $8^{19} + 8^{19}$ بصورت تواندار کدام است ؟

(۱) 8^{38} (۲) 16^{19} (۳) 2^{23} (۴) 2^{58}

۵ - حاصل $5^x + 5^x + 5^x + 5^x + 5^x$ کدام گزینه است ؟

(۱) 25^x (۲) 5^{5x} (۳) 25^{5x} (۴) 5^{x+1}

۶ - حاصل عبارت $\left(\frac{25^{20} + 25^{20}}{5^{20} + 5^{20}} \right)$ کدام است ؟

(۱) 5^{80} (۲) 5^{40} (۳) 25^{10} (۴) 5^{10}

* نکته ۲: در جمع اعداد تواندار با پایه ۲ هرگاه دو عدد تواندار اولی باهم برابر و بقیه توانها بصورت متوالی با فاصله یک واحد از هم مرتب شده باشند . برای بدست آوردن جواب کافی است عدد تواندار آخری را نوشته و به توان آن یک واحد اضافه کنیم .

مثال : $2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = 2^6$

📖 تستهای مربوطه :

۷ - حاصل عبارت $2^4 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{50}$ کدام است ؟

- (۱) 2^{69} (۲) 2^{51} (۳) 2^{1242} (۴) 2^{102}

۸ - حاصل عبارت مقابل به صورت عدد تواندار کدام است ؟ $2^{105} + 2^{104} + 2^{103} + 2^{102} + 2^{101} + 2^{101}$

- (۱) 2^{106} (۲) 8^{102} (۳) 2^{304} (۴) 6^{106}

۹ - حاصل عبارت مقابل به صورت تواندار برابر است با : $2^{103} \div 2^{205} + 2^{101} + 2^{101}$

- (۱) 2^{304} (۲) 2^{102} (۳) 2^{103} (۴) 2^{104}

۱۰ - مقدار $1 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1383} + 2^{1384})$ برابر کدام است ؟ (انوشی اتمی ۸۰)

- (۱) 2^{1382} (۲) 2^{1383} (۳) 2^{1384} (۴) 2^{1385}

۱۱ - حاصل کسر $\frac{2^{20} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} + 2^{23} + \dots + 2^{50}}{2^{18} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{21} + \dots + 2^{48}}$ کدام است ؟

- (۱) ۲ (۲) ۸ (۳) ۱۶ (۴) ۴

✱ **نکته ۳ :** در جمع اعداد تواندار با پایه ۳ هرگاه ۳ عدد تواندار اولی باهم برابر و بقیه توانها بصورت دو به دو متوالی با فاصله یک واحد از هم مرتب شده باشند . برای بدست آوردن جواب کافی است عدد تواندار آخری را نوشته و به توان آن یک واحد اضافه کنیم .

$$3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^3 + 3^3 + 3^4 + 3^4 + 3^5 + 3^5 = 3^6 \quad \text{مثال :}$$

📖 تستهای مربوطه :

۱۲ - حاصل عبارت $3^{100} + 3^{100} + 3^{100} + 3^{101} + 3^{101} + \dots + 3^{200} + 3^{200}$ کدام است ؟

- (۱) 3^{201} (۲) 3^{202} (۳) 3^{203} (۴) 3^{204}

✱ **نکته ۴ :** در تفریق اعداد تواندار با پایه ۲ هرگاه توان اعداد تواندار با فاصله یک واحد از هم بصورت نزولی مرتب شده باشند در اینصورت آخرین عدد تواندار جواب خواهد بود . لازم به ذکر است در تفریق اعداد تواندار روش اصلی استفاده از فاکتور گیری می باشد که نکته بالایی هم از آن استنباط شده است .

$$2^{1386} - 2^{1385} - 2^{1384} = 2^{1384} \quad \text{مثال :}$$

تستهای مربوطه :

۱۳ - حاصل عبارت $2^{1383} - 2^{1382}$ برابر است با :

2^{1382} (۴)	۱ (۳)	۲ (۲)	2^{1383} (۱)
----------------	-------	-------	----------------

۱۴ - حاصل عبارت مقابل به صورت تواندار برابر است با :

$2^{2005} - 2^{2004} - 2^{2003} - 2^{2002} - 2^{2001} =$	2^{2000} (۳)	2^{2005} (۲)	2^{2001} (۱)
--	----------------	----------------	----------------

* **نکته ۵ :** در جمع و تفریق اعداد تواندار بصورت کسری اگر مخرج بصورت یک عدد تواندار باشد در پیدا کردن جواب هم می توان از تفکیک کسرها حاصل را بدست آورد و هم از طریق فاکتورگیری . ولی اگر مخرج به صورت جمع یا تفریق چند عدد تواندار باشد بهترین روش فاکتورگیری است .

مثال ۱ : $\frac{9^8 + 9^7 + 9^6 + 9^5}{9^5} = \frac{9^8}{9^5} + \frac{9^7}{9^5} + \frac{9^6}{9^5} + \frac{9^5}{9^5} = 9^3 + 9^2 + 9^1 + 1 = 729 + 81 + 9 + 1 = 820$

روش دوم (فاکتورگیری) :

$$\frac{9^8 + 9^7 + 9^6 + 9^5}{9^5} = \frac{9^5(9^3 + 9^2 + 9^1 + 1)}{9^5} = 9^3 + 9^2 + 9^1 + 1 = 729 + 81 + 9 + 1 = 820$$

مثال ۲ : $\frac{2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}}{2^{x+3} - 2^x} = \frac{2^x(1 + 2^1 + 2^2)}{2^x(2^3 - 1)} = \frac{7}{7} = 1$

تستهای مربوطه :

۱۵ - حاصل عبارت $\frac{4^7 + 4^6 + 4^5}{4^5}$ برابر است با :

20 (۴)	13 (۳)	21 (۲)	69 (۱)
----------	----------	----------	----------

۱۶ - مقدار عددی کسر مقابل کدام است ؟

$\frac{5^6 - 5^5 - 5^4 - 5^3}{5^2} = ?$	25 (۳)	94 (۲)	125 (۱)
---	----------	----------	-----------

۱۷ - حاصل $\frac{16^3 + 8^2}{4^3}$ کدام است ؟

129 (۴)	65 (۳)	17 (۲)	33 (۱)
-----------	----------	----------	----------

۱۸- حاصل عبارت $\frac{2^3 + 3^4}{2^4}$ برابر است با:

- (۱) 3^4 (۲) $\left(\frac{5}{4}\right)^4$ (۳) 3^3 (۴) $\frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^4$

۱۹- حاصل $\frac{125^6 - 5^{14}}{5^{10} - 25^3}$ برابر است با:

- (۱) 5^6 (۲) 5^8 (۳) ۱ (۴) 5^4

۲۰- حاصل کسر $\frac{5^7 + 5^8 + 5^9 + \dots + 5^{20}}{5^{-7} + 5^{-8} + 5^{-9} + \dots + 5^{-20}}$ کدام است ؟

- (۱) 5^{17} (۲) 5^{27} (۳) 5^{-27} (۴) $2(5^7 + 5^8 + 5^9 + \dots + 5^{20})$

۲۱- حاصل $\frac{x^7 - x^5}{x^5 - x^3} \div \frac{x^7 + x^5}{x^5 + x^3}$ کدام است ؟

- (۱) x (۲) x^2 (۳) $\frac{1}{x^2}$ (۴) ۱

* نکته ۶ : جمع اعداد توان دار با پایه های مساوی

در این حالت می توان از عددی که توان کوچک تری دارد فاکتور گرفت :

$$a^m + a^{m+1} + \dots + a^{m+n} = a^m (1 + a + a^2 + \dots + a^n)$$

مثال :

$$\frac{4^{25} + 4^{26} + 4^{27} + 4^{28}}{4^{28}} = \frac{4^{25}(1 + 4^1 + 4^2 + 4^3)}{4^{28}} = \frac{(4^2)^{25}(1 + 4 + 16 + 64)}{4^{28}} = \frac{4^{50} \times 85}{4^{28}} = 4^{22} \times 85 = 340$$

📖 تستهای مربوطه :

۲۲- حاصل عبارت $3^{1383} + 5 \times 3^{1383} + 3^{1384}$ برابر است با : (آزمون مدارس هماهنگ ۸۳)

- (۱) 3^{1385} (۲) 3^{1384} (۳) 3^{1383} (۴) 3^{1382}

۲۳- حاصل کسر توانی $\frac{2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}}{2^{x+3} - 2^x}$ کدام است ؟ (تیزهوشان)

- (۱) ۲ (۲) 2^{x-2} (۳) 2^{x-9} (۴) ۱

ضرب و تقسیم اعداد تواندار :

$$a^m = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_m \quad (m \in n) \quad \text{مفهوم توان :}$$

قوانین پایه ای توان (یادآوری و تکمیل) :

* نکته ها :

۱) $a^1 = a$

مثال : $\left(\frac{2}{5}\right)^1 = \frac{2}{5}$

۲) $a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$

مثال : $\left[-\left(-\frac{8}{5}\right)\right]^0 = 1$

۳) $1^n = 1$

مثال : $1^{100} = 1$

۴) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

مثال : $(-4)^3 (-4)^3 (-4) = (-4)^6$

۵) $a^m \times b^m = (ab)^m$

مثال : $8^4 \times 5^4 = 40^4$

۶) $a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

مثال : $7^5 \div 7^3 = 7^{5-3} = 7^2$

۷) $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad (b \neq 0)$

مثال : $3^6 \div 5^6 = \left(\frac{3}{5}\right)^6$

۸) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (b \neq 0)$

مثال : $\left(\frac{7}{8}\right)^4 = \frac{7^4}{8^4}$

$$9) \left. \begin{aligned} a^n \div a^n &= \left(\frac{a}{a}\right)^n = 1^n = 1 \\ a^n \div a^n &= a^{n-n} = a^0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^0 = 1 \quad (n \in N, a \neq 0)$$

۱۰) توان منفی $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

مثال : $9^2 \div 9^5 = 9^{-3}$ یا $\frac{9^2}{9^5} = \frac{1}{9^3} \Rightarrow 9^{-3} = \frac{1}{9^3} = \left(\frac{1}{9}\right)^3$

$$۱۱) (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n)^m = a_1^m \times a_2^m \times a_3^m \times \dots \times a_n^m$$

$$۱۲) (a^n)^m = a^{n \times m} \quad \text{مثال: } (2^3)^2 = 2^6$$

✱ **نکته ۱:** توجه کنید که دو عدد a^n و $(a^n)^m$ لزوماً برابر نیستند.

مثال: دو عدد 2^{3^2} و $(2^3)^2$ را در نظر بگیرید:

$$(2^3)^2 = 2^6 \quad \text{و} \quad 2^{3^2} = 2^9 \Rightarrow (2^3)^2 \neq 2^{3^2}$$

مثال: به تساوی های زیر توجه کنید:

$$(3^2)^2 = (3^2)^4 = 3^{16} \quad \text{و} \quad 3^{5^2} = 3^{25} \quad \text{و} \quad \left(\left((3^2)^5 \right)^3 \right)^2 = 1 \quad \text{و} \quad \left((3^2)^5 \right)^3 = 3^{10}$$

✱ **نکته ۲:** اگر n عددی زوج و $a \neq 0$ باشد، آن گاه $-a^n \neq (-a)^n$

مثال:

$$\left. \begin{aligned} (-2)^4 &= (-2)(-2)(-2)(-2) = +16 \\ -2^4 &= -(2 \times 2 \times 2 \times 2) = -16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -(-2)^4 \neq -2^4$$

✱ **نکته ۳:** اگر عدد منفی به توان زوج برسد، حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی است.

مثال:

$$(-3)^4 = 81$$

$$(-3)^3 = -27$$

$$(-a)^{2k} = a^{2k}$$

$$(-a)^{2k+1} = -a^{2k+1} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

✱ **نکته ۴:** در ضرب و تقسیم اعداد توان دار اگر نه پایه و نه توان هیچ کدام مساوی نباشند قاعده ای برای ضرب یا تقسیم وجود ندارد. بنابراین $a^m \times b^n$ (اگر $a \neq b, m \neq n$) ساده نمی شود. اما اگر a و b پس از تجزیه، عامل های مشترک داشته باشند، طبق قوانین توان ساده می شوند.

مثال:

$$8^3 \times 2^5 = (2^3)^3 \times 2^5 = 2^9 \times 2^5 = 2^{14}$$

تساوی توان ها :

در تساوی دو عدد توان دار ، در صورتی که پایه ها مساوی باشند توان ها نیز مساویند .

$$a^m = a^n \Rightarrow m = n$$

* نکته : در صورت وجود عوامل جدا کننده در عبارت های توان دار ، می توانیم جای توان ها را عوض کنیم :

$$\left[(a^m)^n \right]^p = (a^p)^{mn} = (a^m)^{pn} = (a^n)^{pm} = a^{nmp}$$

تستهای مربوطه :

۲۴ - حاصل کسر $\frac{3^4 \times 6^3 \times 2^2 \times 5}{5 \times 6^2 \times 2^6 \times 3^8}$ برابر است با : (نمونه دولتی ۸۱)

(۱) $\frac{1}{6^5}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{2}{6}$ (۴) $\frac{1}{6^3}$

۲۵ - معکوس عبارت $\frac{6^5 \times 6}{6^8}$ برابر است : (نمونه دولتی ۷۶)

(۱) $\frac{1}{36}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) ۳۶ (۴) ۶

۲۶ - چه کسری از 2^{27} برابر 2^{23} است . (نمونه دولتی ۷۱)

(۱) $\frac{23}{27}$ (۲) $\frac{8}{27}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) $\frac{1}{16}$

۲۷ - عدد $8^{14} \times 9^{15}$ چند برابر 7^{14} است . (نمونه دولتی ۷۴)

(۱) ۹ (۲) ۸ (۳) ۷۲ (۴) ۱۵

۲۸ - حاصل $10^{232} \times (10^2)^3 \times (10^{22})^2 \times (10^2)^3$ کدام است ؟

(۱) 10^{552} (۲) 10^{36} (۳) 10^{520} (۴) 10^{558}

۲۹ - اگر عدد طبیعی ۱ تا ۲۰ را در هم ضرب کنیم و سپس عدد حاصل را به عوامل اول تجزیه کنیم، توان عدد در

حاصل ضرب چقدر است ؟ (نمونه دولتی ۷۶)

(۱) ۱۰ (۲) ۱۷ (۳) ۱۸ (۴) ۱۴

۳۰ - حاصل عبارت $\frac{20^5 \times 14^5}{35^6 \times 8^4}$ برابر است با : (نمونه دولتی ۷۳)

(۱) $\frac{1}{35 \times 8}$ (۲) $\frac{8}{35}$ (۳) $\frac{7}{10}$ (۴) $\frac{1}{7 \times 10}$

۳۱ - حاصل عبارت $2^8 \times 5^3 \times 2^{\frac{19}{8}}$ به صورت عدد تواندار کدام است ؟ (مسابقات علمی)

- (۱) 10^6 (۲) 10^3 (۳) 9^6 (۴) 9^3

۳۲ - حاصل $\frac{81^{-3} \times 27^{-16}}{\left(\frac{1}{9}\right)^5 \times 3^{-60}}$ برابر است با : (مسابقات علمی)

- (۱) 9^5 (۲) 3^8 (۳) 27^5 (۴) $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$

۳۳ - عدد $2^{12} \times 5^{142}$ برابر است با :

- (۱) 100^{71} (۲) 200^{17} (۳) 200^{71} (۴) 10^{142}

۳۴ - حاصل عدد $75 \times 3^3 \times 5^2$ کدام عدد زیر است ؟

- (۱) 5^4 (۲) 15^4 (۳) 5^6 (۴) 15^6

۳۵ - حاصل $(16)^{-75} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$ برابر است با

- (۱) ۹ (۲) ۲۷ (۳) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (۴) نمی توان محاسبه کرد

۳۶ - حاصل $1 - \left(\frac{a^9 - a^4}{a^9}\right)$ کدام است ؟

- (۱) -1 (۲) $-a^2$ (۳) $a^2 - 1$ (۴) a^2

۳۷ - حاصل عبارت $(3^{-2} - 2^{-2})^{-1}$ برابر است با : (انترنشنال ۷۵)

- (۱) ۱۳ (۲) ۱ (۳) $-7/2$ (۴) $-5/4$

۳۸ - حاصل $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \times \left(\frac{4}{7}\right)^3$ برابر است با : (نمونه دولتی ۷۳)

- (۱) 1^{10} (۲) $\left(\frac{4}{7}\right)^{10}$ (۳) $\left(\frac{7}{4}\right)^4$ (۴) $\left(\frac{7}{4}\right)^{10}$

۳۹ - حاصل عبارت $2^{2/3} \times (1/25 \times 2^{0/7})$ برابر است با : (نمونه دولتی ۷۲)

- (۱) $12/8$ (۲) $16/2$ (۳) ۱۰ (۴) $2/0.4$

۴۰ - حاصل کسر $\frac{(0/12)^3 + (0/0.6)^3 + (0/0.3)^3}{(0/0.3)^3}$ برابر است با : (نمونه دولتی ۷۲)

- (۱) 7^3 (۲) ۷۳ (۳) $(0/18)^3$ (۴) $(0/73)^3$

نصف ، ثلث ، ربع ، خمس و ... در اعداد توان دار :

برای پیدا کردن نصف ، ثلث ، ربع ، خمس در اعداد توان دار کافی است عبارت داده شده را به ترتیب بر ۲، ۳، ۴،

۵، تقسیم کرده و یا در $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ضرب کنیم.

مثال ۱: نصف عدد 2^{40} چه عددی است ؟ (نمونه دولتی)

$$2^{39} \quad (4)$$

$$1^{40} \quad (3)$$

$$2^{20} \quad (2)$$

$$1^{20} \quad (1)$$

$$2^{40} \div 2^1 = 2^{40-1} = 2^{39}$$

مل : گزینه ۴ درست است .

مثال ۲: ثلث عدد 9^{4n-2} چه عددی است ؟ (انرژي اتمی ۷۵)

$$3^{8n-3} \quad (4)$$

$$3^{4n-5} \quad (3)$$

$$3^{4n-2} \quad (2)$$

$$3^{8n-5} \quad (1)$$

$$9^{4n-2} \div 3 = (3^2)^{4n-2} \div 3 = 3^{8n-4} \div 3^1 = 3^{8n-4-1} = 3^{8n-5}$$

مل : گزینه ۱ درست است .

* نکته : برای پیدا کردن نصف ، ثلث ، ربع ، خمس در اعداد توان داری که پایه آن ها به صورت کسری است بهتر

است عبارت داده شده را $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{5}$ ضرب کنیم :

مثال : کدام گزینه ثلث عدد $\left(\frac{1}{9}\right)^{24}$ است ؟ (نمونه دولتی ۷۴)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{49} \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{23} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{24} \quad (2)$$

$$9^{24} \quad (1)$$

مل : گزینه ۴ درست است .

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{24} \times \frac{1}{3} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^{24} \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{48} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{49}$$

📖 تستهای مربوطه :

۴۱- ثلث عدد 3^9 برابر است با : (نمونه دولتی ۷۳)

- (۱) 3^3 (۲) 3^8 (۳) 1^9 (۴) 1^3

۴۲- نصف عدد 8^{4n-2} چقدر است ؟ (مسابقات علمی)

- (۱) 4^{4n-2} (۲) 8^{4n-3} (۳) 2^{12n-7} (۴) 8^{4n-1}

۴۳- نصف عدد 4^{2k-4} برابر است با : (المپیاد ریاضی ۷۱)

- (۱) 2^{2k-6} (۲) 2^{2k-5} (۳) 2^{4k-9} (۴) 3^{4k-5}

۴۴- خمس عدد 25^{2a-3} کدام است ؟ (مسابقات علمی)

- (۱) 5^{4a-4} (۲) 5^{4a-5} (۳) 5^{4a-6} (۴) 5^{4a-7}

۴۵- n چقدر باشد تا ربع 16^n مساوی 64 باشد ؟ (المپیاد ریاضی ۷۴)

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) ۳ (۴) ۲ -

🎯 جایگذاری در اعداد توان دار :

* نوع اول جایگذاری :

مثال ۱: اگر $2^x = 5$ باشد 16^x چقدر است ؟ (نمونه دولتی ۷۱)

- (۱) ۵ (۲) ۲۵ (۳) ۱۲۵ (۴) ۶۲۵

$$16^x = (2^4)^x = (2^x)^4 = (5)^4 = 625$$

حل : گزینه ۴ درست است .

* نوع دوم جایگذاری :

مثال ۱: اگر $2^b = 5$ باشد 2^{b+3} کدام است ؟ (مدارس هماهنگ ۸۳)

- (۱) ۶۴ (۲) ۴۰ (۳) ۲۸ (۴) ۲۸

$$2^{b+3} = 2^b \times 2^3 = 5 \times 2^3 = 5 \times 8 = 40$$

حل : گزینه ۲ درست است .

* نوع سوم جایگذاری (حالت ترکیبی) :

مثال ۱: اگر $3^x = 2$ مقدار 9^{2x+1} برابر است ؟ (المپیاد ریاضی ۸۰)

- (۱) ۱۴۴ (۲) ۲۴۳ (۳) ۳۲ (۴) ۶۴

مل : گزینه ۱ درست است .

$$9^{2x+1} = 9^{2x} \times 9^1 = (3^2)^{2x} \times 9 = 3^{4x} \times 9 = (3^x)^4 \times 9 = (2)^4 \times 9 = 16 \times 9 = 144$$

📖 تستهای مربوطه :

۴۶ - اگر $3^a = 10$ باشد ، حاصل عبارت 27^{a+1} کدام است ؟ (نمونه دولتی ۷۶)

- (۱) ۲۷۰۰۰ (۲) ۲۷۰ (۳) ۲۷۰۰ (۴) ۲۷

۴۷ - اگر $4^x = 10$ باشد حاصل عبارت $2^{2x-2} \times 4^{x+2}$ کدام گزینه است ؟ (المپیاد ریاضی ۷۶)

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۶۲/۵ (۳) ۴۰ (۴) ۴۰۰

۴۸ - اگر $x = 2^{100}$ باشد ، حاصل 16^{51} چقدر است ؟ (المپیاد ریاضی ۷۸)

- (۱) $4x^2$ (۲) $4x^4$ (۳) $16x^2$ (۴) $16x^4$

۴۹ - اگر $2^a = 10$ باشد ، مقدار عبارت $(0.25)^a + (0.5)^a$ کدام است ؟ (مسابقات علمی)

- (۱) ۰/۰۲ (۲) ۰/۱۲ (۳) ۰/۱۱ (۴) ۰/۰۱

۵۰ - اگر $7^{30} = 49a + 98$ باشد مقدار 7^{28} بر حسب a برابر است با : (علامه طباطبایی ۷۹ و ۸۱)

- (۱) $\frac{a}{49}$ (۲) $49a + 2$ (۳) $a - 2$ (۴) $a + 2$

۵۱ - اگر $3^x = 6$ باشد حاصل $\frac{2^{(x+1)} + 2^{(x+2)}}{6^x}$ کدام است ؟ (دکتر حسابی ۸۱)

- (۱) ۱ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۲ (۴) $\frac{7}{6}$

۵۲ - اگر $7^{2a-6} = 1$ باشد آنگاه حاصل $3(a^{-1} - 2a^{-2})$ چقدر خواهد بود ؟ (نمونه دولتی ۷۳)

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۲۰ (۴) $\frac{5}{6}$

۵۳ - اگر $x = 5^{2^2}$ باشد حاصل $5x^{16}$ به صورت یک عدد تواندار کدام است ؟ (علامه طباطبایی ۸۰)

- (۱) 5^{9^7} (۲) 5^{120} (۳) 5^{129} (۴) 5^{130}

معادله توانی :

معادله توانی ، معادله ای است که مجهول آن در توان باشد ، مثل $6^x = 36$. برای چنین معادله ای در صورت امکان دو طرف معادله را به دو عدد توان دار با پایه های مساوی تبدیل کرده ، سپس نماها را مساوی قرار داده و معادله را حل می کنیم .

$$6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$$

مثال :

$$1) 2^{x+1} = 32 \Rightarrow 2^{x+1} = 2^5 \Rightarrow x+1 = 5 \Rightarrow x = 5-1 \Rightarrow x = 4$$

$$2) 625^{x+3} = 5^{2x-6} \Rightarrow (5^4)^{x+3} = 5^{2x-6} \Rightarrow 5^{4x+12} = 5^{2x-6} \Rightarrow 4x+12 = 2x-6 \\ \Rightarrow 4x-2x = -6-12 \Rightarrow 2x = -18 \Rightarrow x = -9$$

* نکته ۱ : پس در حل معادله توانی مراحل زیر را طی می کنیم :

۱ - در معادله $2^{2x} \times 4 + 24 = 280$ مقدار x کدام است ؟ (المپیاد ریاضی ۸۲)

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۲ (۱)

حل :

(۱) در مرحله اول معادله توانی داده شده را معلوم و مجهول می کنیم .

$$2^{2x} \times 4 = 280 - 24 = 256 = 2^8$$

(۲) در مرحله دوم دو طرف معادله را به صورت دو عدد تواندار با پایه های مساوی تبدیل می کنیم .

$$2^{2x} \times 2^2 = 2^8 \Rightarrow 2^{2x+2} = 2^8$$

(۳) در مرحله سوم توان های دو طرف را مساوی قرار داده و تشکیل معادله می دهیم .

$$2x+2 = 8$$

(۴) در مرحله چهارم معادله بوجود آمده را حل کرده و مقدار مجهول را به دست می آوریم .

$$2x+2 = 8 \Rightarrow 2x = 8-2 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} \Rightarrow x = 3$$

* **نکته ۲ :** در حل معادلات توانی که علامت مابین عبارتهای مجهولی جمع یا تفریق باشد از فاکتور گیری استفاده می کنیم :

مثال ۱ : اگر $2^x + 2^{x+1} = 96$ مقدار x کدام است ؟ (مفید ۸۰)

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

حل : گزینه ۳ درست است . $2^x + 2^x \times 2^1 = 96 \Rightarrow 2^x(1 + 2^1) = 96 \Rightarrow 2^x = \frac{96}{3} = 32 = 2^5 \Rightarrow x = 5$

مثال ۲ : اگر $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 39$ باشد مقدار x چقدر است ؟ (نمونه دولتی ۸۶)

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) ۳

حل : گزینه ۴ درست است .

$$3^x(1 + 3^{-1} + 3^{-2}) = 39 \Rightarrow 3^x\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 39 \Rightarrow 3^x\left(\frac{13}{9}\right) = 39 \Rightarrow 3^x = 39 \div \frac{13}{9}$$

$$3^x = 39 \times \frac{9}{13} \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

* **نکته ۳ :** در حل معادلات توانی اگر طرف دوم تساوی ، مساوی ۱ باشد . با استفاده از نکته (هر عدد به توان صفر مساوی یک است .) توان را مساوی صفر قرار می دهیم .

مثال ۱ : اگر $5^{2x-4} = 1$ باشد ، مقدار x کدام است ؟ (المپیاد ریاضی ۸۲)

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

حل : گزینه ۳ درست است .

$$5^{2x-4} = 1 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2$$

$$5^{2x-4} = 1 \Rightarrow 5^{2x-4} = 1 = 5^0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

روش دیگر : $5^{2x-4} = 1 \Rightarrow 5^{2x-4} = 1 = 5^0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

📖 تستهای مربوطه :

۵۴- اگر $5^x \times 5^{x+1} = 1$ باشد ، مقدار x برابر است با : (نمونه دولتی ۸۰)

- (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۵۵- اگر $3^{2(a-1)} = 1$ باشد آن گاه مقدار a برابر است با : (نمونه دولتی ۸۱)

- (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴) ۲

۵۶- در عبارت $5^{x-12} \times 5^{4x-3} = 1$ مقدار x کدام است ؟ (المپیاد ریاضی ۷۹)

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ± 2 (۴) ۱

۵۷- در تساوی $3^{13} \times 9^x = 3^3$ مقدار x برابر است با : (تیزهوشان ۸۰)

- (۱) $x = 2$ (۲) $x = 3$ (۳) $x = 5$ (۴) $x = 6$

۵۸- اگر داشته باشیم $2^{2n+1} = 2^{2n} + 64$ ، مقدار n کدام است ؟ (تیزهوشان ۸۱)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۵۹- مقدار x در معادله $2^{2x-3} + 8 = 40$ کدام است ؟ (نمونه دولتی ۸۱)

- (۱) ۸ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) -۴

۶۰- اگر $2^{x+3} \times 3^{x+2} = 72$ باشد مقدار x چقدر خواهد بود ؟ (المپیاد ریاضی ۷۸)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) -۱

۶۱- اگر $3^{4x-8} \times \left(\frac{1}{27}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{2x}$ باشد مقدار x چقدر است ؟ (المپیاد ریاضی ۷۹)

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۳ (۴) ۳

۶۲- در صورتی که $2^x \times 2^y = 2^6$ و $2^{3x} \times 2^{-y} = 2^{10}$ باشد . مقدار x و y کدام است ؟ (نمونه دولتی ۸۲)

- (۱) $\begin{cases} x=8 \\ y=-2 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$

۶۳- باتوجه به معادله $\begin{cases} x^m \times x^n = x^y \\ x^m \div x^n = x \end{cases}$ مقدار m و n را حساب کنید . (نمونه دولتی ۸۲)

- (۱) $\begin{cases} m=-2 \\ n=-1 \end{cases}$ (۲) $\begin{cases} m=3 \\ n=-1 \end{cases}$ (۳) $\begin{cases} m=1 \\ n=-3 \end{cases}$ (۴) $\begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$

۶۴- بفرض $2^x = 8^{y+1}$ و $9^y = 3^{x-9}$ ، مقدار $x+y$ برابر است با : (انترنشنال ۷۶)

- (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۳۰ (۴) ۲۷

مربوط به دانش آموزان علاقه مند به شرکت در آزمون تیزهوشان

۱ - ثلث عدد $4 \times 3^{16} - 3 \times 3^{14} + 7 \times 3^{15} - 5 \times 3^{16}$ کدام است ؟ (انترنسی اتمی ۸۱)(۱) 3^{15} (۲) 3^{16} (۳) 3^{17} (۴) 3^{18} ۲ - اگر $25^{x-2} = (\frac{1}{2})^{x-2}$ مقدار $(2x)^{2x+1}$ برابر است با : (انترنسی اتمی ۷۶)(۱) 4^4 (۲) 2^{11} (۳) 2^{10} (۴) 8^5 ۳ - اگر $2a - 3b = 4$ ، مقدار $4^a \div (\frac{1}{125})^{2-b}$ کدام است ؟

(۱) ۱۲۸ (۲) ۲۵۶ (۳) ۵۱۲ (۴) ۱۰۲۴

۴ - اگر $\frac{1}{2} = (3a - b)^{-1}$ باشد حاصل $8^a \div (\frac{1}{5})^{1-b}$ چیست ؟

(۱) ۲ (ب) ۴ (ج) ۸ (د) ۱۶

۵ - اگر $3^{-b} = 7$ و $7^{-a} = 3$ باشد ، حاصل $(2ab - 1)^{2000}$ کدام است ؟(۱) صفر (ب) 3^{2000} (ج) ۱ (د) 21^{2000} ۶ - اگر $2^a = 3$ و $3^b = 2$ باشد حاصل $9^{b+1} + 5ab + (\frac{1}{25})^{-a}$ کدام است ؟

(۱) ۵۰ (ب) ۳۶ (ج) ۴۵ (د) ۴۶

۷ - اگر $2^a = 3$ و $3^b = 5$ و $5^c = 2$ باشد حاصل 10^{2abc} کدام است ؟ (مسابقات علمی)

(۱) صفر (ب) ۱ (ج) ۱۰ (د) ۱۰۰

$$\left[\frac{9^{ab}}{4^a} + \frac{125^{ab}}{5^{2a}} \right] \times 5^{ab}$$

۸ - اگر $2^a = 3$ و $3^b = 2$ حاصل عبارت زیر کدام است ؟ (مفید ۸۱)(الف) $\frac{17}{9}$ (ب) $\frac{17}{18}$ (ج) $\frac{34}{18}$ (د) $\frac{34}{9}$ ۹ - در معادله ی $\frac{3^{x+1} - 3^{x-1}}{27^{1-x}} = 72$ ، مقدار x کدام است ؟ (تیزهوشان)(الف) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) ۳۱۰ - در عبارت $49^2 = 7^{\frac{x+1}{x}} \times 7^{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-1}{x}}}$ مقدار x کدام است ؟ (تیزهوشان ۷۸)

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۲ (۴) -۱

۱۱ - اگر $2^a = 3$ و $3^a = 2$ باشد حاصل $(3 - 4ab)^3$ کدام است ؟

(۱) ۱ (۲) ۹ (۳) -۱ (۴) -۱۶

۱۲ - در معادله ی $2^{x+1} - 2^{6-x} = 8$ ، مقدار x کدام است ؟ (تیزهوشان)

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۱ (۴) ۴ -

۱۳ - در معادله ی $2^{x+1} + 2^{2-x} = 6$ ، مقدار x کدام است ؟ (تیزهوشان)

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۱ (۴) گزینه ۱ و ۳ درست است.

۱۴ - در معادله ی $8 \times 2^{2x^2} + 2 = 2050$ ، مقدار x کدام است ؟ (تیزهوشان)

- (۱) ± 2 (۲) ۳ (۳) ± 1 (۴) ۴ -