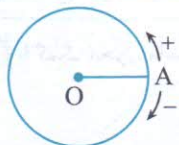


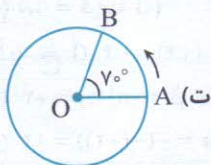
معرفی علامت‌دار

اگر روی یک محور یک نقطه (نقطهٔ صفر) را به عنوان مبدأ در نظر بگیریم، تمام اعداد سمت راست مبدأ، اعداد مثبت و اعداد سمت چپ، اعداد منفی خواهند بود. در ریاضیات برای ساده و مختصر کردن بیان عددهای علامت‌دار از علامت‌های + و - استفاده می‌کنیم. در بسیاری از مسائل روزمره هم نقطه‌ای را به عنوان مبدأ در نظر گرفته و از اعداد علامت‌دار برای حل مسائل استفاده می‌کنیم.

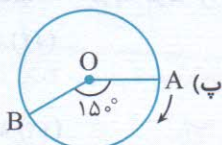


۱ متحرکی از نقطه A روی محیط دایره حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد و زاویه AOB را بسازد. وقتی متحرک روی نقطه A می‌باشد، اندازهٔ زاویه صفر است. با توجه به شکل، وقتی نقطه A در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه‌ای مثبت و وقتی در جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت کند، زاویه‌ای منفی تشکیل می‌شود.

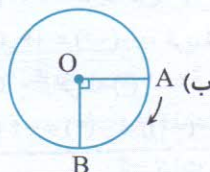
اندازهٔ هر یک از زاویه‌های زیر را با توجه به جهت‌های مثبت و منفی مشخص شده، با یک عدد علامت‌دار نشان دهید.



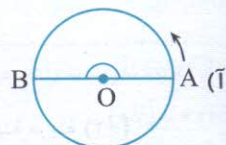
(ت) $+7^\circ$



(پ) -15°



(ب) -9°



(آ) $+18^\circ$ پاسخ

عددهای $..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...$ را عددهای صحیح می‌نامیم. عددهای صحیح به سه دسته تقسیم می‌شوند:

$+1, +2, +3, ...$

(۱) عددهای صحیح مثبت:

۰

(۲) عدد صحیح صفر:

$-1, -2, -3, ...$

(۳) عددهای صحیح منفی:

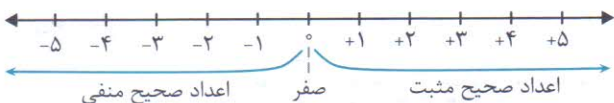
نکته عدد صفر نه مثبت است و نه منفی (عدد صفر، عدد علامت‌دار نمی‌باشد).

$+4 = 4$, $+11 = 11$

نکته عددهای صحیح مثبت، همان عددهای طبیعی‌اند. برای مثال می‌توان نوشت:

محور اعداد صحیح

برای نمایش اعداد صحیح از محور زیر استفاده می‌کنیم:



نکته صفر به عنوان مبدأ است.

مقایسهٔ اعداد صحیح

روی محور هر چه به سمت مثبت پیش می‌رویم، عددها بزرگ‌تر می‌شوند. به عنوان مثال:

$+8 > +4$, $+4 > 0$, $-1 > -3$, $+2 > -4$

با توجه به این مطلب و محور اعداد صحیح، می‌توانیم نکات زیر را نتیجه بگیریم:

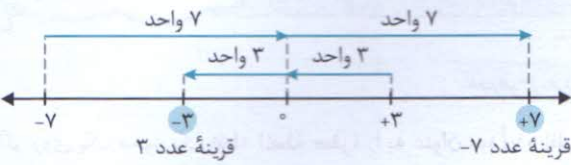
(۱) هر عدد مثبت، از هر عدد منفی بزرگ‌تر است.

(۲) عدد صفر از هر عدد منفی بزرگ‌تر است.

(۳) در بین اعداد منفی، عددی که بدون در نظر گرفتن علامت بزرگ‌تر باشد، کوچک‌تر است.

مثلاً $-4 < -5$ ، زیرا $4 < 5$ می‌باشد.

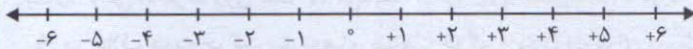
روی محور اعداد صحیح، هر عدد نسبت به مبدأ
(یعنی نقطه صفر) یک قرینه دارد:



قرینه هر عدد منفی، عددی مثبت و قرینه هر عدد مثبت، عددی منفی است. قرینه صفر هم خود صفر است.

برای نمایش قرینه هر عدد، از نماد (-) در سمت چپ آن عدد استفاده می‌کنیم. مثلاً قرینه ۵- می‌شود (۵-).

با کمک محور، مانند نمونه تساوی‌ها را کامل کنید.



نمونه: $-(+5) = -5$ قرینه (+۵):

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| آ) ... = قرینه (+۴) | ب) ... = قرینه (-۶) | پ) ... = قرینه (-۲) |
| ت) ... = قرینه (۰) | ث) ... = قرینه (+۲) | ج) ... = قرینه (-۴) |
| ✓ پاسخ: آ) $-(+۴) = -۴$ قرینه (+۴) | ب) $-(-۶) = +۶$ قرینه (-۶) | پ) $-(-۲) = +۲$ قرینه (-۲) |
| ث) $-(-(۲)) = +۲$ قرینه (+۲) | ت) $۰ = ۰$ قرینه (۰) | ج) $-(-(-۴)) = -۴$ قرینه (-۴) |

قرینه قرینه هر عدد با خود آن عدد برابر است.

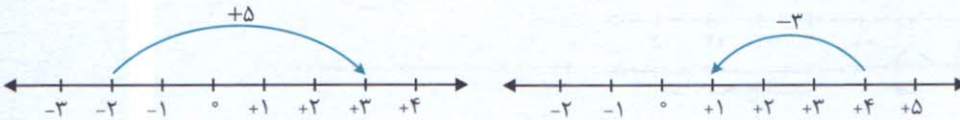
اگر به مثال قبل دقت کنید، می‌بینید که اگر تعداد منفی‌های پشت عدد زوج باشد، آن‌گاه عدد مثبت و اگر تعداد منفی‌ها فرد باشد، آن‌گاه عدد منفی است.

حرکت روی محور عددهای صحیح

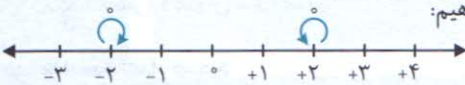
هر حرکت روی محور عددهای صحیح را با یک عدد علامت‌دار یا صفر بیان می‌کنیم. علامت عدد، جهت حرکت و مقدار آن بدون در نظر گرفتن علامت، اندازه حرکت را نشان می‌دهد.

اگر حرکت در جهت مثبت باشد، آن را با علامت مثبت بیان می‌کنیم و اگر حرکت در جهت منفی باشد، آن را با علامت منفی بیان می‌کنیم.

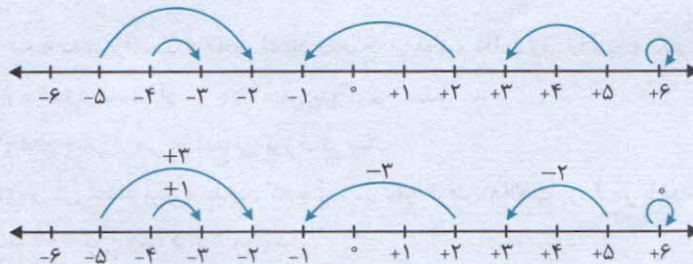
به عنوان مثال، در محور زیر (سمت چپ) به اندازه ۵ واحد در جهت مثبت حرکت کرده‌ایم، پس برای این حرکت عدد +۵ را می‌نویسیم و همچنین در محور دیگر (سمت راست) به اندازه ۳ واحد در جهت منفی حرکت کرده‌ایم، پس برای این حرکت عدد -۳ را می‌نویسیم:



همچنین اگر حرکت از یک نقطه به همان نقطه باشد، آن را با عدد صفر نشان می‌دهیم:

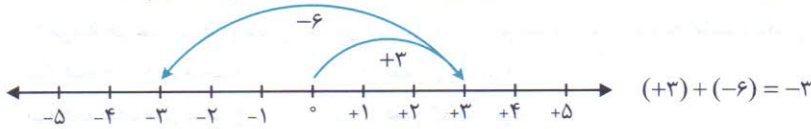


برای هر حرکت روی محور، یک عدد صحیح (مثبت، منفی یا صفر) بنویسید.



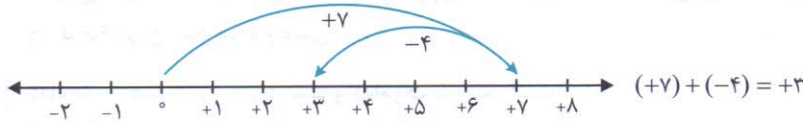
✓ پاسخ:

وقتی روی محور دو حرکت پشت سر هم که شروع یکی از آن‌ها مبدأ است، انجام می‌شود، می‌توانیم یک جمع بنویسیم:



توجه کنیم که حاصل جمع، عدد مربوط به انتهای حرکت دوم است.

هم چنین می‌توان با استفاده از محور، حاصل جمع اعداد صحیح را به دست آورد. به عنوان مثال، برای جمع $(+7) + (-4)$ ، داریم:



$$5 - 7 = 5 + (-7)$$

هر تفریق را می‌توانیم به صورت جمع بنویسیم. مانند:

ابتدا تفریق‌ها را به جمع تبدیل کنید. سپس برای هر جمع یک محور رسم کنید و به کمک آن حاصل را به دست آورید.

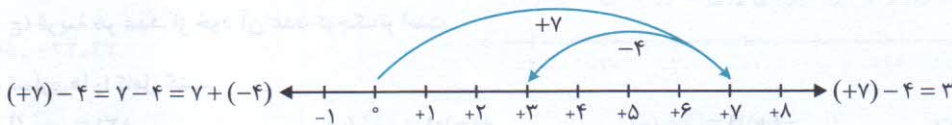
(پ) $-4 - 2$

(ب) $-5 - (+2)$

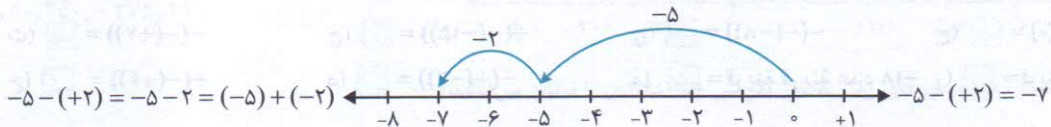
(آ) $(+7) - 4$

(ث) $3 - 3$

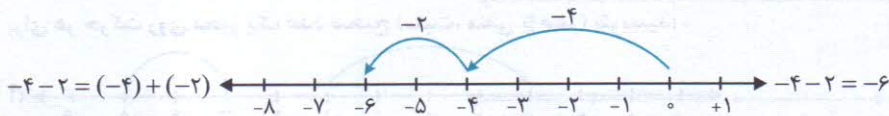
(ت) $4 + 0$



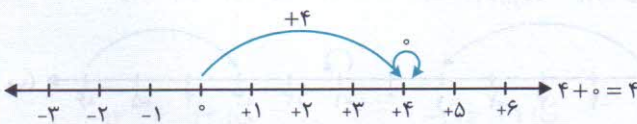
پاسخ: آ



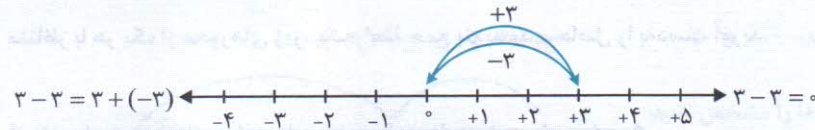
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

$$(-5) + 0 = -5$$

حاصل جمع هر عدد صحیح با صفر، خود آن عدد می‌شود.

$$5 + (-5) = 0$$

حاصل جمع هر عدد صحیح با قرینه‌اش، برابر صفر می‌شود.

مانند اعداد طبیعی، گسترده‌های صحیح را نیز می‌توان نوشت. مثال:

$$541 = 500 + 40 + 1, \quad -427 = -400 + (-20) + (-7)$$

گسترده‌های -701 و 256 را بنویسید.

$$-701 = -700 + (-1), \quad 256 = 200 + 50 + 6$$

پاسخ:

جمع و تفریق عددهای صحیح

در درسنامه قبل، جمع و تفریق عددهای صحیح به کمک محور گفته شده است. در این درسنامه سه روش دیگر را بیان می‌کنیم:

روش اول: جمع و تفریق عددهای صحیح به کمک دایره‌های سفید (○) و سیاه (●)

اگر هر دایره سفید (○) نشان‌دهنده +1 و هر دایره سیاه (●) نشان‌دهنده -1 باشد، وقتی آن دو را روی هم و داخل یک ظرف می‌ریزیم (با هم جمع می‌کنیم)، حاصل برابر صفر می‌شود.



۶ با توجه به تعریف دایره‌های سیاه و سفید، مشخص کنید هر شکل چه عددی را نشان می‌دهد؟

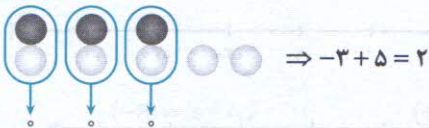


✓ پاسخ: (آ) درون ظرف، ۴ مهره سفید وجود دارد و هر مهره سفید نشان‌دهنده +1 است، لذا ظرف، عدد +4 را نشان می‌دهد.

(ب) در ظرف ۳ مهره سیاه وجود دارد و هر مهره سیاه نشان‌دهنده عدد -1 می‌باشد، پس ظرف عدد -3 را نشان می‌دهد.

(پ) چون ○ + ● برابر صفر است، پس هیچ دایره‌ای باقی نمی‌ماند و در نتیجه عدد ظرف برابر صفر است.

۷ مانند نمونه حاصل جمع و تفریق‌ها را به دست آورید.



(ب) $-4 - 3$

(آ) $-2 - (-3)$

✓ پاسخ: ابتدا تفریق را به جمع تبدیل می‌کنیم:

$$-2 - (-3) = -2 + 3 = 1$$

(آ)

$$-4 - 3 = -4 + (-3) = -7$$

(ب)

روش دوم:

برای جمع و تفریق اعداد صحیح از چهار قانون زیر استفاده می‌کنیم:

$$(20) + 80 = 20 + 80 = 100$$

قانون ۱: اگر دو عدد مثبت باشند، حاصل جمع آن‌ها مثل جمع دو عدد طبیعی است:

قانون ۲: اگر دو عدد منفی باشند، حاصل جمع آن‌ها برابر قرینه مجموع دو عدد بدون در نظر گرفتن علامت‌ها می‌باشد:

$$(-4) + (-9) = -(4 + 9) = -13$$

قانون ۳: اگر در جمع دو عدد صحیح، یکی از دو عدد، مثبت و دیگری منفی باشد و بدون در نظر گرفتن علامت‌ها مقدار مثبت

بیشتر باشد، برای به دست آوردن حاصل، بدون در نظر گرفتن علامت‌ها، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنیم:

$$(7) + (-5) = 7 - 5 = 2$$

قانون ۴: اگر در جمع دو عدد صحیح، یکی از دو عدد، مثبت و دیگری منفی باشد و بدون در نظر گرفتن علامت‌ها مقدار عدد منفی

بیشتر باشد، برای به دست آوردن حاصل، بدون در نظر گرفتن علامت‌ها، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم کرده و حاصل را

$$5 + (-10) = -(10 - 5) = -5$$

قرینه می‌کنیم:

چهار قانون بالا را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

(۱) اگر دو عدد هم علامت باشند، دو عدد را بدون در نظر گرفتن علامت جمع می‌کنیم و علامت یکسان را برای آن‌ها در نظر می‌گیریم.

(۲) اگر دو عدد هم علامت نباشند، بدون در نظر گرفتن علامت، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنیم و علامت عددی را

برای پاسخ قرار می‌دهیم که بدون در نظر گرفتن علامت، بزرگ‌تر است.

۸ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(ت) $(-(-۴)) - (-۷۳) =$

(پ) $-۲۵ + ۳۹ =$

(ب) $-۴۹ - ۴۲ =$

(آ) $۵۷ - ۸۳ =$

پاسخ: (آ) بدون در نظر گرفتن علامت‌ها مقدار عدد منفی بزرگ‌تر از عدد مثبت است، پس برای به دست آوردن حاصل، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنیم و علامت منفی را برای جواب قرار می‌دهیم:

$$۵۷ - ۸۳ = -(۸۳ - ۵۷) = -۲۶$$

(ب) هر دو عدد منفی می‌باشند، بنابراین حاصل، برابر قرینه مجموع دو عدد، بدون در نظر گرفتن علامت است، پس:

$$-۴۹ - ۴۲ = -(۴۹ + ۴۲) = -۹۱$$

(پ) بدون در نظر گرفتن علامت‌ها، عدد مثبت، بزرگ‌تر از عدد منفی است، پس برای به دست آوردن حاصل، عدد کوچک‌تر را از عدد بزرگ‌تر کم می‌کنیم:

$$-۲۵ + ۳۹ = ۳۹ - ۲۵ = ۱۴$$

$$-(-۷۳) - (-(-۴)) = ۷۳ - ۴ = ۶۹$$

(ت)

روش سوم: جمع و تفریق اعداد صحیح به کمک جدول ارزش مکانی

برای جمع و تفریق اعداد صحیح می‌توان از جدول ارزش مکانی مانند نمونه استفاده کرد:

یکان	دهگان
۸	۴
۷	۵

$$40 + 8 \Rightarrow \begin{cases} 40 - 50 = -10 \\ -50 + (-7) \Rightarrow 8 - 7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} -10 + 1 = -9 \\ \text{حاصل} = -9 \end{matrix}$$

۹ مانند بالا، حاصل جمع و تفریق‌های زیر را به دست آورید.

(پ) $۲۵۴ - ۳۷۱ =$

(ب) $-۷۳ + ۸۲ - ۲۵ =$

(آ) $۵۸ - ۹۳ =$

یکان	دهگان
۸	۵
۳	۹

$$50 + 8 \Rightarrow 50 - 90 = -(90 - 50) = -40, 8 - 3 = 5$$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = -40 + 5 = -(40 - 5) = -35$$

پاسخ: (آ)

یکان	دهگان
۳	۷
۲	۸
۵	۲

$$-70 - 3 \Rightarrow 80 + 2 \Rightarrow \underbrace{-70 + 80}_{+10} - 20 = -10, \underbrace{-3 + 2}_{-1} - 5 = -6$$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = -10 - 6 = -(10 + 6) = -16$$

(ب)

یکان	دهگان	صدگان
۴	۵	۲
۱	۷	۳

$$200 + 50 + 4 \Rightarrow \begin{cases} 200 - 300 = -100 \\ 50 - 70 = -20 \\ -300 - 70 - 1 \Rightarrow 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل} = \underbrace{-100 - 20}_{-120} + 3 = -117$$

(پ)

محاسبه مقدار تقریبی جمع و تفریق اعداد صحیح

ابتدا اعداد را گرد می‌کنیم و سپس مقدار تقریبی حاصل جمع را به دست می‌آوریم.

۱۰ مقدار تقریبی حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید.

(ب) $-۴۰۲ + ۲۷۸ - ۱۲۹ =$

(آ) $-۴۸ + ۶۳ =$

$$48 \approx 50, 63 \approx 60 \Rightarrow -48 + 63 \approx -50 + 60 = 60 - 50 = 10$$

پاسخ: (آ)

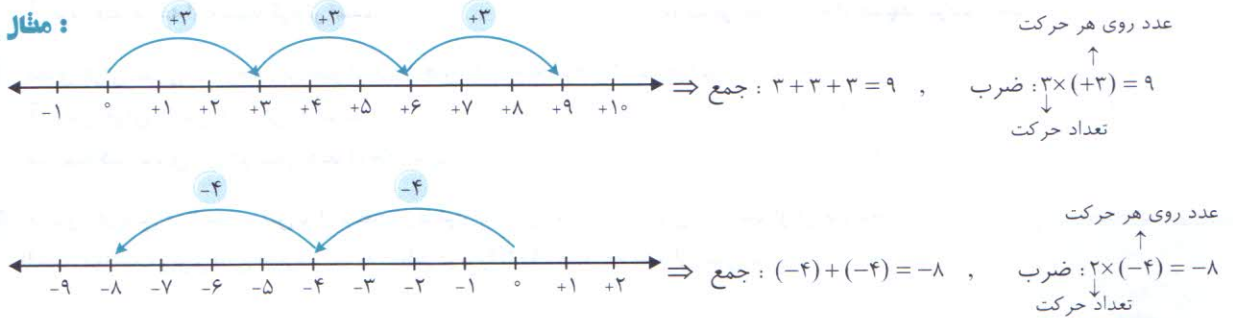
$$-402 \approx -400, 278 \approx 300, -129 \approx -100$$

(ب)

$$-402 + 278 - 129 \approx -400 + 300 - 100 = -(400 - 300) - 100 = -100 - 100 = -(100 + 100) = -200$$

روش اول: استفاده از محور

در جمع و تفریق عددهای صحیح، اگر تعدادی حرکت یک اندازه در یک جهت داشته باشیم، می‌توان جمع را به ضرب تبدیل کرد و برای این کار، کافی است تعداد حرکت‌ها را در عددی که هر حرکت نشان می‌دهد ضرب کنیم.



روش دوم: برای به دست آوردن حاصل ضرب دو عدد صحیح، بدون در نظر گرفتن علامت‌ها، عددها را مانند اعداد طبیعی در هم ضرب کرده و برای تعیین علامت عدد حاصل، از دو قاعده زیر استفاده می‌کنیم:

قاعده ۱: حاصل ضرب دو عدد هم‌علامت (هر دو عدد مثبت یا هر دو عدد منفی)، عددی مثبت است.

قاعده ۲: حاصل ضرب دو عدد مختلف‌العلامه (یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی)، عددی منفی است.

می‌توان دو قاعده بالا را در جدول مقابل خلاصه کرد:

$\times$	+	-
+	مثبت	منفی
-	منفی	مثبت

حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

(آ) $(-4) \times (+5)$ (ب) $(-8) \times (-9)$ (پ) $4 \times (-9)$ (ت) $(-6) \times (-4) \times (-8)$

پاسخ: آ) یکی از اعداد منفی و دیگری مثبت است، بنابراین حاصل عددی منفی است و داریم:

$(-4) \times (+5) = -4 \times 5 = -20$

ب) هر دو عدد منفی هستند، بنابراین حاصل عددی مثبت است و داریم:

$(-8) \times (-9) = +8 \times 9 = +72 = 72$

$4 \times (-9) = -4 \times 9 = -36$

(پ)

$(-6) \times (-4) \times (-8) = -(24 \times 8) = -192$

۲۴

(ت)

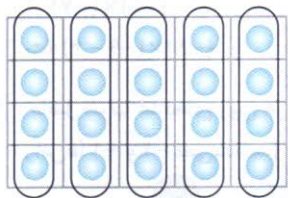
همه عددهای صحیح ممکن که می‌توانند به جای $\triangle$ و $\square$ قرار بگیرند به طوری که $\triangle \times \square = -18$ شود را مشخص کنید.

پاسخ: چون حاصل ضرب عددی منفی شده است، باید یکی از اعداد مثبت و دیگری منفی باشد:

$(+1) \times (-18) = -18$, $(+18) \times (-1) = -18$, $(+2) \times (-9) = -18$, $(+9) \times (-2) = -18$

$(+6) \times (-3) = -18$, $(+3) \times (-6) = -18$

در دوره دبستان برای نشان دادن ضرب و تقسیم عددهای طبیعی، از شکلی مانند نمونه زیر استفاده می‌کردیم: (۲۰ مهره در چهار ردیف پنج‌تایی قرار دارند).



$$\text{تقسیم‌های متناظر: } \begin{cases} 20 \div 5 = 4 \\ 20 \div 4 = 5 \end{cases} \quad \text{ضرب‌های متناظر: } \begin{cases} 4 \times 5 = 20 \\ 5 \times 4 = 20 \end{cases}$$

مانند بالا می‌توان برای ضرب هر دو عدد صحیح، دو تقسیم نوشت:

$$(-7) \times (+6) = -42 \Rightarrow \begin{cases} (-42) \div (+6) = -7 \\ (-42) \div (-7) = +6 \end{cases}$$

$\div$	+	-
+	مثبت	منفی
-	منفی	مثبت

نکته برای تقسیم دو عدد صحیح، ابتدا دو عدد را بدون در نظر گرفتن علامت، بر هم تقسیم نموده و سپس از جدول مقابل برای تعیین علامت استفاده می‌کنیم:

مثال حاصل هر یک از تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

(ب) $(+36) \div (-4)$

(ت) $(+72) \div (+18)$

(ب) $(+36) \div (-4) = -(36 \div 4) = -9$

(ت) $(+72) \div (+18) = +(72 \div 18) = +4$

(آ) $(-48) \div (+6)$

(پ) $(-56) \div (-7)$

(آ) $(-48) \div (+6) = -(48 \div 6) = -8$ **پاسخ: ✓**

(پ) $(-56) \div (-7) = +(56 \div 7) = +8$